

es.1	es.2	es.3	es.4	es.5	es. 6	somma
7	5	6	6	6	6	30

Meccanica Razionale 1: Scritto Generale: 18.02.2013

Cognome e nome: Matricola:

Gli studenti che hanno seguito il corso nell'AA 2011-2012 devono svolgere gli esercizi 1-5. Gli studenti che hanno seguito negli A.A. precedenti devono svolgere gli esercizi 1-4 e 6.

1. Consideriamo il seguente moto di un punto P :

$$x = e^{-t} \cos(t), \quad y = e^{-t} \sin(t), \quad z = \sqrt{7} e^{-t},$$

essendo $t \geq 0$.

- Calcolare le componenti e il modulo della velocità del punto P .
- Calcolare la lunghezza della curva percorsa all'istante t .
- Calcolare la curvatura della curva descritta dal punto P .
- Calcolare la torsione della curva descritta dal punto P .

2. Consideriamo il solido di rotazione

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -h \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq |z|\},$$

essendo $h > 0$. Supponiamo che la densità sia uguale a ρ_1 nella parte superiore e a ρ_2 in quella inferiore.

- Trovare il baricentro del solido.
- Determinare il momento d'inerzia del solido rispetto all'asse z .

3. Consideriamo il pendolo semplice, costituito da un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su una circonferenza liscia situata nel piano xz . Sul punto materiale agisce anche una forza orizzontale e parallela al piano xz (cioè, $\vec{F} = m a_v \vec{i}$, essendo $a_v > 0$).

- a. Trovare la forza applicata totale.
 - b. Spiegare perchè la forza applicata totale è conservativa.
 - c. Trovare le equazioni del moto.
4. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sul paraboloide di equazione $z = 1 - (x^2 + y^2)$ sotto l'effetto della forza elastica $\vec{F} = -k\vec{r}$, essendo $k > 0$ la costante di elasticità.
- a. Determinare il grado di libertà N del sistema e formulare la lagrangiana in N coordinate generalizzate. (Si consiglia di scegliere le coordinate cilindriche).
 - b. Indicare due costanti del moto e spiegare perchè lo sono.
 - c. Formulare le equazioni di Eulero-Lagrange.
5. Per opportune costanti fisiche positive k e α si consideri l'hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{k}{2}(q_1 - q_2)^2 - \alpha e^{-\frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2},$$

dove m è la massa delle tre particelle.

- a. Derivare le equazioni di Hamilton.
 - b. Derivare le equazioni di Eulero-Lagrange.
 - c. Indicare, motivando la risposta, almeno tre costanti di moto.
6. Con riferimento ad una terna trirettangola e levogira $Oxyz$ di versori \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , si consideri il sistema di vettori applicati

$$(P_1, 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}), \quad (P_2, \vec{i} - 2\vec{k}), \quad (P_3, \vec{i} + \vec{j}), \quad (P_4, \vec{k}),$$

essendo $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$, $P_3 = (1, 0, -1)$, $P_4 = (0, 0, 0)$. Si chiede di:

- a. Trovare il momento risultante del sistema rispetto all'origine.
- b. Scrivere l'equazione dell'asse centrale.
- c. Dire, motivando la risposta, quale è il sistema di vettori applicati più semplice possibile (cioè costituito dal minor numero di vettori applicati) a cui il sistema è riducibile.