

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA ELETTRONICA

Corso Facoltativo di 5 Crediti
Corso di Laurea Specialistica
in Ingegneria Elettronica

Cornelis VAN DER MEE
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari
Viale Merello 92, 09123 Cagliari
070-6755605 (studio), 070-6755601 (FAX)
cornelis@bugs.unica.it, cornelis@krein.unica.it
URL: bugs.unica.it

Indice

I	ANALISI FUNZIONALE	1
1	Spazi di Banach	1
2	Spazi di Hilbert	4
3	Contrazioni e Punti Fissi	5
4	Basi ortonormali in spazi di Hilbert	6
5	Applicazioni	9
6	Operatori lineari	11
7	Spettro di un operatore lineare	17
8	Operatori lineari autoaggiunti e unitari	19
9	Operatori Compatti in Spazi di Hilbert	24
II	METODI ANALITICI PER LA RISOLUZIONE ESPLICITA	31
1	Coordinate ortogonali	31
2	Separazione delle variabili	34
3	Equazione di Helmholtz	39
	3.1 Equazione di Helmholtz sull'Intervallo	39
	3.2 Equazione di Helmholtz sul Rettangolo	43
4	Equazioni delle onde e del calore	45
	4.1 Equazioni delle onde e del calore sull'intervallo	45
	4.2 Equazioni delle onde e del calore sul rettangolo	47
	4.3 Alcune applicazioni semplici	50
III	FUNZIONI SPECIALI	55
1	Metodo di Frobenius	55
2	Funzioni di Bessel	60
	2.1 Definizione e proprietà semplici	60
	2.2 Funzioni di Bessel di seconda specie	62
	2.3 Ortogonalità e zeri	65
	2.4 Altre funzioni cilindriche	68
	2.5 Funzioni sferiche di Bessel	69
3	Funzioni sferiche	71

3.1	Funzioni sferiche	71
3.2	Polinomi di Legendre	73
3.3	Funzioni di Legendre associate	78
3.4	Le funzioni sferiche per $n = 3$: Completezza	79
4	Polinomi di Hermite	80
5	Polinomi di Laguerre	84
6	Polinomi di Chebyshev	90
IV PROBLEMI DI STURM-LIOUVILLE		93
0	Introduzione	93
1	Problemi agli autovalori	93
1.1	Impostazione del problema agli autovalori	93
1.2	Formule di Green	94
1.3	Proprietà dell'operatore L	95
2	Problema di Sturm-Liouville	99
2.1	Funzione di Green	100
2.2	Riduzione ad un'equazione integrale	103
2.3	Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni	105
3	Problemi di Sturm-Liouville singolari	108
V PROBLEMI AL CONTORNO		113
1	Equazione di Laplace	113
1.1	Equazione di Laplace nel disco	113
1.2	Equazione di Laplace nella sfera	116
1.3	Equazione di Laplace nel cilindro	117
2	Equazione di Helmholtz	124
2.1	Equazione di Helmholtz sul Disco e sulla Sfera	124
3	Equazioni delle onde e del calore	127
3.1	Equazioni delle onde e del calore per uno spettro di autovalori	127
3.2	Alcuni esempi	129
3.3	Quando esiste lo spettro continuo	131
3.4	Impostazione generale	137
VI EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER		141
1	Equazione di Schrödinger	141
2	Equazione di Schrödinger Radiale	143
2.1	La buca di potenziale	145
2.2	Oscillatore armonico	148
2.3	Atomo d'idrogeno	151
3	Equazione di Schrödinger Periodica	152

A	La Funzione Gamma	159
B	Integrazione secondo Lebesgue	161
1	Insiemi di Borel	161
2	Integrale di Lebesgue	163
3	Alcuni Teoremi	166
C	Funzioni Test, Distribuzioni e Applicazioni	169
1	Funzionali Lineari	170
2	Funzioni Test	171
3	Distribuzioni	172
4	Trasformata di Fourier	174
4.1	Trasformata di Fourier negli spazi L^1 e L^2	174
4.2	Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	177
5	Distribuzione in un Dominio	182
	Bibliografia	183

Capitolo I

ANALISI FUNZIONALE

In questo capitolo si introducono gli spazi di Banach e di Hilbert, gli operatori lineari e loro spettro. Inoltre si discutono gli operatori compatti su uno spazio di Hilbert.

1 Spazi di Banach

Consideriamo noto il concetto di spazio vettoriale X rispetto ad un campo di scalari \mathbb{F} che supponiamo uguale a \mathbb{R} (numeri reali) oppure a \mathbb{C} (numeri complessi). Quindi in X sono state definite l'addizione $X \times X \mapsto X$ e la moltiplicazione scalare $\mathbb{F} \times X \mapsto X$ con le solite proprietà aritmetiche.

Uno *spazio normato* X è uno spazio vettoriale su cui è definita una norma $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

- a. $\|\varphi\| \geq 0$ per ogni $\varphi \in X$; (positività)
- b. $\|\varphi\| = 0$ se e solo se $\varphi = 0$; (definitezza)
- c. $\|\alpha\varphi\| = |\alpha| \|\varphi\|$ per $\alpha \in \mathbb{F}$ e $\varphi \in X$; (omogeneità)
- d. $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$. (disuguaglianza triangolare)

Dalle (c)-(d) segue subito che

- e. $|\|\varphi\| - \|\psi\|| \leq \|\varphi - \psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$.

Per *distanza* tra φ e ψ si intende la $\|\varphi - \psi\|$.

Una successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ di elementi di X è detta *convergente* al vettore $\varphi \in X$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$, ossia se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$ per ogni $n > n(\varepsilon)$.

Una successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ di elementi di uno spazio normato X si dice *successione di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$

per $n, m > n(\varepsilon)$, ossia se $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0$. La norma in X si dice *completa* se ogni successione di Cauchy in X è convergente in X . Uno spazio normato con norma completa si dice *spazio di Banach*.

Siano X e Y due spazi normati, $U \subset X$ e $f : U \rightarrow Y$. Allora f si dice *continua* in $\varphi \in U$ se $\{f(\varphi_n)\}_{n=1}^\infty$ converge a $f(\varphi)$ in Y per ogni successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ in U che converge a φ . La funzione f si dice continua se è continua in ogni punto $\varphi \in U$.

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Banach, trascurando la dimostrazione della completezza della norma.

1. Per ogni sottoinsieme chiuso e limitato Ω di \mathbb{R}^n , sia $C(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni scalari (reali o complesse) continue in Ω . Allora la funzione $\|\cdot\|_\infty : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|f\|_\infty = \max_{z \in \Omega} |f(x)|,$$

introduce una norma completa in $C(\Omega)$. Si verifica che $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ se e solo se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente in $x \in \Omega$.

2. Per ogni sottoinsieme limitato Ω di \mathbb{R}^n , sia $C(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni scalari (reali o complesse) continue e **limitate** in Ω . Allora la funzione $\|\cdot\|_\infty : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \Omega} |f(x)|,$$

introduce una norma completa in $C(\Omega)$. Si verifica che $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ se e solo se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente in $x \in \Omega$.

3. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in \mathbb{R}^n . Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω , dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $\|\cdot\|_2 : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

è una norma completa in $L^2(\Omega)$.

4. Sia $1 \leq p < \infty$. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in \mathbb{R}^n . Con $L^p(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni sommabili alla potenza p -esima (nel senso di Lebesgue) in Ω , dove due funzioni per cui i valori

sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $\|\cdot\|_p : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

è una norma completa in $L^p(\Omega)$.

5. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $\|\cdot\|_2 : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2},$$

è una norma completa in ℓ^2 .

6. Sia $1 \leq p < \infty$. Sia ℓ^p lo spazio vettoriale di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ è convergente. Allora la funzione $\|\cdot\|_p : \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p},$$

è una norma completa in ℓ^p .

Per un elemento φ di uno spazio normato X e $r > 0$, l'insieme

$$B(\varphi; r) = \{\psi \in X : \|\varphi - \psi\| < r\}$$

è definito la *sfera aperta* di raggio r e centro φ . Un sottoinsieme U si dice *aperto* se per ogni $\varphi \in X$ esiste $r > 0$ (che dipende da φ) tale che $B(\varphi; r) \subset U$. Dato il sottoinsieme U di X , la *parte interna* U^0 di U è l'insieme aperto più grande di X contenuto in U .

Un sottoinsieme U di X si dice *chiuso* se esso contiene tutti i limiti di tutte le successioni con termini in U e limiti in X . Dato il sottoinsieme U di X , la sua *chiusura* \bar{U} è il sottoinsieme chiuso più piccolo di X che contiene U .

Dato il sottoinsieme U di X , la *frontiera* ∂U di U è l'insieme dei punti di X che possono essere il limite sia di una successione in U sia di una successione in $X \setminus U$. Si dimostra facilmente che

$$\partial U = \bar{U} \cap \overline{(X \setminus U)}.$$

Un sottoinsieme U di X si dice *limitato* se il diametro

$$\text{diam}(U) = \sup\{\|\varphi - \psi\| : \varphi, \psi \in U\}$$

è finito. In tal caso esiste $r > 0$ (con $r > \frac{1}{2}\text{diam}(U)$) tale che $U \subset B(\varphi; r)$ per un opportuno vettore $\varphi \in X$.

Un sottoinsieme D di X si dice *denso* in X se ogni vettore $\varphi \in X$ è il limite di una successione con termini in D . Uno spazio di Banach si dice *separabile* se ha un sottoinsieme denso finito o infinito numerabile.

2 Spazi di Hilbert

Sia X uno spazio vettoriale reale o complesso (cioè, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Allora una funzione $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{F}$ soddisfacente le seguenti proprietà:

- a. $(\varphi, \varphi) \geq 0$, (positività)
- b. $(\varphi, \varphi) = 0$ se e solo se $\varphi = 0$, (definitezza)
- c. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$ per ogni $\varphi, \psi \in X$, (simmetria)
- d. $(\alpha\varphi + \beta\psi, \chi) = \alpha(\varphi, \chi) + \beta(\psi, \chi)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $\varphi, \psi, \chi \in X$, (linearità)

è definita *prodotto scalare* (oppure *prodotto interna*, oppure, nel caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, *prodotto sesquilineare*). Nella (c) il soprasegno indica il coniugato complesso se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Dalle (c)-(d) segue subito che

$$e. (\chi, \alpha\varphi + \beta\psi) = \overline{\alpha}(\chi, \varphi) + \overline{\beta}(\chi, \psi) \text{ per } \alpha, \beta \in \mathbb{F} \text{ e } \varphi, \psi, \chi \in X.$$

Ogni prodotto scalare induce la cosiddetta *norma indotta*

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}.$$

Inoltre vale la *disuguaglianza di Schwartz*¹

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \|\psi\| \text{ per } \varphi, \psi \in X,$$

che è un'uguaglianza se e solo se φ e ψ sono proporzionali. La disuguaglianza di Schwartz implica la disuguaglianza triangolare²

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|, \quad \varphi, \psi \in X.$$

Uno spazio vettoriale con prodotto scalare si chiama *spazio pre-Hilbert*. Uno spazio pre-Hilbert con norma indotta completa si dice *spazio di Hilbert*.

¹Dim: Sia ξ un numero complesso di modulo 1 tale che $\xi(\varphi, \psi) = |(\varphi, \psi)|$ e sia $\chi = \xi\psi$. In tal caso $\|\chi\| = \|\psi\|$, mentre per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $0 \leq \|\varphi + t\chi\|^2 = \|\varphi\|^2 + 2t(\varphi, \chi) + t^2\|\chi\|^2$. Quindi il discriminante di questo polinomio reale quadrato è non positivo. Dunque $4(\varphi, \chi)^2 - 4\|\varphi\|^2\|\chi\|^2 \leq 0$ e quindi $|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\|\|\psi\|$.

²Dim: $\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\text{Re}(\varphi, \psi) \leq \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\|\varphi\|\|\psi\| = (\|\varphi\| + \|\psi\|)^2$.

Uno spazio di Hilbert soddisfa all'*identità del parallelogramma*

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2).$$

Vice versa, se la norma di uno spazio di Banach soddisfa all'identità del parallelogramma, essa è la norma indotta di uno spazio di Hilbert.

Il prodotto scalare può essere espresso nella norma tramite la cosiddetta *formula di polarizzazione*:

$$(\varphi, \psi) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2), & \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ \frac{1}{4}(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2 + i\|\varphi + i\psi\|^2 - i\|\varphi - i\psi\|^2), & \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Hilbert.

1. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in \mathbb{R}^n . Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω , dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $(\cdot, \cdot) : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)\overline{g(x)} dx,$$

è un prodotto scalare in $L^2(\Omega)$ che induce la solita norma.

2. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $(\cdot, \cdot) : \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n},$$

è un prodotto scalare in ℓ^2 che induce la solita norma.

3 Contrazioni e Punti Fissi

Sia M un sottoinsieme chiuso di uno spazio di Banach X . Una funzione $F : M \rightarrow M$ si dice *contrazione* se per un'opportuna costante $\varepsilon \in (0, 1)$ vale la stima

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

Ovviamente, una contrazione è una funzione uniformemente continua. Un punto $y \in M$ si dice *punto fisso* di una funzione $F : M \rightarrow M$ se $F(y) = y$. Ovviamente, una contrazione $F : M \rightarrow M$ non ha più di un punto fisso. Dimostriamo ora l'esistenza del punto fisso.

Teorema I.1 Sia M un sottoinsieme chiuso di uno spazio di Banach X e sia $F : M \rightarrow M$ una contrazione. Allora F ha un unico punto fisso.

Dimostrazione. Scegliendo $x_0 \in M$ si definiscono i punti x_1, x_2, x_3, \dots ricorsivamente da $x_{n+1} = F(x_n)$ per $n = 1, 2, \dots$. Scrivendo, per $m = 1, 2, \dots$, $F^m : M \rightarrow M$ per la funzione ottenuta applicando la F m volte in seguito, si vede subito che

$$\|x_{m+1} - x_m\| = \|F^m(x_1) - F^m(x_0)\| \leq \varepsilon^m \|x_1 - x_0\|.$$

Per dimostrare che la successione $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ è di Cauchy, si faccia il seguente calcolo:

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \|x_{n+k+1} - x_{n+k}\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon^{n+k} \|x_1 - x_0\| = \frac{1 - \varepsilon^p}{1 - \varepsilon} \varepsilon^n \|x_1 - x_0\| \leq \frac{\|x_1 - x_0\|}{1 - \varepsilon} \varepsilon^n, \end{aligned}$$

mostrando che $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ è di Cauchy. Siccome M è un sottoinsieme chiuso di uno spazio di Banach, esiste $y \in M$ tale che $\|y - x_n\| \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$. Di conseguenza e grazie alla continuità della F ,

$$F(y) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = y.$$

Quindi y è punto fisso della F . □

4 Basi ortonormali in spazi di Hilbert

Consideriamo prima uno spazio vettoriale di dimensione N con prodotto scalare. Tale spazio ha una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ di vettori di lunghezza 1 ortogonali tra loro. Partendo da una base (i.e., un sistema linearmente indipendente massimale) $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ qualsiasi, si può costruire una base ortonormale utilizzando il *processo di Gram-Schmidt*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|} \\ \varphi_2 = \frac{\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1\|} \\ \varphi_3 = \frac{\psi_3 - (\psi_3, \varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3, \varphi_2)\varphi_2}{\|\psi_3 - (\psi_3, \varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3, \varphi_2)\varphi_2\|} \\ \vdots \\ \varphi_N = \frac{\psi_N - (\psi_N, \varphi_1)\varphi_1 - \dots - (\psi_N, \varphi_{N-1})\varphi_{N-1}}{\|\psi_N - (\psi_N, \varphi_1)\varphi_1 - \dots - (\psi_N, \varphi_{N-1})\varphi_{N-1}\|}. \end{array} \right.$$

È facile controllare induttivamente che φ_j è ortogonale ai vettori $\varphi_1, \dots, \varphi_{j-1}$ e ha norma 1 ($j = 1, 2, \dots, N$).

Per trovare la base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ dalla base $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ in modo non iterativo, si consideri la matrice di Gram

$$G = \{(\psi_n, \psi_m)\}_{n,m=1}^N.$$

Sostituendo

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n c_{nk} \psi_k, \quad \varphi_m = \sum_{l=1}^m c_{ml} \psi_l,$$

e richiedendo che $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$ (essendo δ_{nm} la delta di Kronecker), otteniamo

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_{nk} \overline{c_{ml}} (\psi_k, \psi_l) = \delta_{nm}.$$

In altre parole, si cerchi una matrice sottotriangolare $C = (c_{nm})_{n,m=1}^N$ tale che

$$CGC^* = \mathbb{I},$$

dove \mathbb{I} è la matrice identità e C^* è la trasposta coniugata di C . Quindi bisogna trovare una matrice sottotriangolare L (con trasposta coniugata L^*) tale che vale la cosiddetta fattorizzazione $G = LL^*$ e poi invertire la L : $C = L^{-1}$. Per ottenere un risultato unico si richiede che gli elementi diagonali L_{11}, \dots, L_{NN} siano positivi. In tal caso la fattorizzazione $G = LL^*$ si dice di Cholesky.

Appena trovata una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$, si ottengono subito le cosiddette *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^N |(\varphi, \varphi_n)|^2,$$

$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^N (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Consideriamo ora uno spazio di Hilbert **separabile** X a dimensione infinita. Estraendo da un sottoinsieme denso e infinito numerabile D un sistema di vettori linearmente indipendente massimale e applicando il processo di Gram-Schmidt senza fermarsi ad un indice superiore N , si ottiene una base ortonormale **e infinita numerabile** $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$. D'altra parte, l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori di una base ortonormale infinita numerabile di X è denso in X . Concludiamo dunque che uno spazio di Hilbert separabile a dimensione infinita viene caratterizzato dall'esistenza di una base ortonormale infinita numerabile.

Data una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X , risultano le *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2,$$

$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Inoltre, vale lo sviluppo

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n$$

nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \varphi - \sum_{n=1}^N (\varphi, \varphi_n)\varphi_n \right\| = 0.$$

Introducendo la successione crescente di sottospazi

$$E_N = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$$

di dimensione N , si può leggere quest'ultima relazione limite nella seguente maniera: La distanza (ortogonale) tra φ e il sottospazio E_N tende a zero se $N \rightarrow \infty$.³ Quindi

$$\varphi \mapsto \sum_{n=1}^N (\varphi, \varphi_n)\lambda_n$$

definisce la *proiezione ortogonale* di φ in E_N .

Dato lo spazio di Hilbert separabile X con base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, si definisce la trasformazione lineare $U : X \rightarrow \ell^2$ da

$$U\varphi = \{(\varphi, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty},$$

ossia $U\varphi$ è la successione dei coefficienti (φ, φ_n) vista come vettore in ℓ^2 . Allora, applicando la definizione della norma in ℓ^2 ,

$$\|U\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 = \|\varphi\|^2,$$

secondo l'identità di Parseval. Si verifica facilmente che U definisce una corrispondenza biunivoca tra X e ℓ^2 . Costruendo la U per $X = \ell^2$ e la sua base ortonormale canonica, si vede subito che U coincide con la trasformazione identità in ℓ^2 . Concludiamo che, tranne per una trasformazione unitaria della base ortonormale, esiste un singolo spazio di Hilbert separabile.

³Sia $\sum_{n=1}^N \lambda_n \varphi_n$ un vettore arbitrario in E_N e $F(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \left\| \varphi - \sum_{n=1}^N \lambda_n \varphi_n \right\|^2$ la distanza tra φ e E_N al quadrato. Si può dimostrare che il minimo viene assunto per $\lambda_n = (\varphi, \varphi_n)$ ($n = 1, \dots, N$).

5 Applicazioni

1. In $X = L^2(-\pi, \pi)$ le funzioni

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

si vede subito che $c_n = (2\pi)^{-1/2}(f, \varphi_n)$ per $n \in \mathbb{Z}$. Secondo l'identità di Parseval segue

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

ossia

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-\infty}^N c_n e^{inx} \right|^2 dx = 0.$$

2. In $X = L^2(-\pi, \pi)$ le funzioni

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_n^c(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_n^s(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, & n = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

si applichi l'identità di Parseval per trovare l'uguaglianza

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right|^2 dx = 0.$$

3. Sia $X = L^2(-1, 1)$. Applicando il processo di Gram-Schmidt al sistema $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ dove $\psi_n(x) = x^n$, si ottengono le versioni normalizzate dei *polinomi di Legendre*. Infatti, moltiplicando questi polinomi da costanti positive tali che hanno il valore 1 in $x = 1$, risultano i soliti *polinomi di Legendre*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n (n!)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n$$

soddisfacenti

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}.$$

Data una funzione $f \in L^2(-1, 1)$ e definendo i coefficienti

$$\beta_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx, \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

otteniamo l'identità di Parseval

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} |\beta_l|^2$$

e lo sviluppo

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l P_l(x)$$

nel senso che

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \left| f(x) - \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(x) \right|^2 dx = 0.$$

Tabella I.1: I polinomi ortogonali classici

Nome dei polinomi	I	$w(x)$
Legendre	$(-1, 1)$	1
Chebyshev di 1 ^a specie	$(-1, 1)$	$(1 - x^2)^{-1/2}$
Chebyshev di 2 ^a specie	$(-1, 1)$	$(1 - x^2)^{1/2}$
Legendre associati	$(-1, 1)$	$(1 - x^2)^m$ per $m = 1, 2, 3, \dots$
Jacobi	$(-1, 1)$	$(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$ con $\alpha, \beta > -1$
Gegenbauer o ultrasferici	$(-1, 1)$	$(1 - x^2)^\lambda$ con $\lambda > -1$
Laguerre	$(0, \infty)$	$x^\alpha e^{-x}$ per $\alpha > -1$
Hermite	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}

4. Sia I un intervallo della retta reale e w una funzione positiva quasi ovunque su I tale che $\int_I |x|^{2n} w(x) dx < \infty$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Applicando il processo di Gram-Schmidt al sistema $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ dove $\psi_n(x) = x^n$, si ottengono i polinomi ortogonali $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ rispetto al peso w , dove il grado di p_n è uguale ad n e i coefficienti principali sono tutti positivi. Data una funzione $f \in L^2(I; w dx)$ e definendo i coefficienti

$$c_n = \int_I f(x) p_n(x) w(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

otteniamo l'identità di Parseval

$$\int_I |f(x)|^2 w(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$$

e lo sviluppo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$$

convergente nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_I \left| f(x) - \sum_{n=0}^N c_n p_n(x) \right|^2 w(x) dx = 0.$$

6 Operatori lineari

Siano X e Y due spazi di Banach. Un'applicazione $T : X \rightarrow Y$ si dice operatore lineare se

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2), \quad x_1, x_2 \in X, \lambda_1, \lambda_2 \in F,$$

dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$. Molto spesso scriviamo Tx invece di $T(x)$. Gli esempi principali degli operatori lineari sono le matrici $n \times m$ (come rappresentazioni degli operatori lineari da F^m in F^n) e gli operatori differenziali lineari. L'immagine di tale T è l'insieme $\text{Im}(T) = \{Tx : x \in X\}$; quest'insieme è un sottospazio lineare di Y . Il kernel di T è il sottospazio lineare di X definito da $\text{Ker } T = \{x \in X : Tx = 0\}$.

Un operatore lineare $T : X \rightarrow Y$ si dice *invertibile* se è una corrispondenza biunivoca tra X e Y .

Proposizione I.2 *Un operatore lineare $T : X \rightarrow Y$ è invertibile se e solo se $\text{Im } T = Y$ e $\text{Ker } T = \{0\}$.*

Dimostrazione. Se T è invertibile, si ha ovviamente $\text{Im } T = Y$ e $\text{Ker } T = \{0\}$. D'altra parte, se $\text{Im } T = Y$ e $\text{Ker } T = \{0\}$, per ogni $y \in Y$ l'equazione $Tx = y$ ha almeno una soluzione $x \in X$ (poichè $\text{Im } T = Y$). Se ci fossero $x_1, x_2 \in X$ tali che $Tx_1 = Tx_2 = y$, allora $T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0$ e quindi $x_1 - x_2 = 0$ (poichè $\text{Ker } T = \{0\}$) e $x_1 = x_2$. Quindi la soluzione $x \in X$ dell'equazione $Tx = y$ è unica per ogni $y \in Y$. \square

Siano X e Y spazi di Banach. Un operatore lineare $T : X \rightarrow Y$ si dice *limitato* se $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < +\infty$. In tal caso il numero

$$\|T\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

si dice *norma* di T .

Se $X = F^n$ (dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$) ha dimensione finita, ogni operatore lineare $T : X \rightarrow Y$ è limitato. Infatti, sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di F^n . Allora ogni operatore limitato $T : F^n \rightarrow Y$ può essere rappresentato come

$$T \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i T e_i.$$

Se si applica ad una matrice, la norma si chiama *norma spettrale*.⁴

Siano X, Y, Z tre spazi di Banach e siano $T : X \rightarrow Y$ e $S : Y \rightarrow Z$ due operatori lineari limitati. Allora $ST : X \rightarrow Z$ è un operatore lineare limitato e $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$. Infatti,

$$\|STx\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|, \quad x \in X,$$

e quindi $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$.

⁴La norma spettrale di una matrice è uguale al suo numero singolare più grande.

Proposizione I.3 *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- a. T è un operatore limitato.
- b. $T : X \rightarrow Y$ è una funzione uniformemente continua.
- c. $T : X \rightarrow Y$ è una funzione continua.
- d. $T : X \rightarrow Y$ è continua in 0.

Dimostrazione. [(a) \implies (b)] Per $x_1, x_2 \in X$ si ha grazie alla limitatezza di T : $\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \|T\|\|x_1 - x_2\|$. Quindi, se $\|x_1 - x_2\| < (\varepsilon/\|T\|)$, allora $\|Tx_1 - Tx_2\| < \varepsilon$. Allora T è uniformemente continuo.

[(b) \implies (c) \implies (d)] Ovvio.

[(d) \implies (a)] Sia T continuo in 0. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\|x\| < \delta$ implica $\|Tx\| < 1$. Quindi per qualsiasi $x \in X$ con $\|x\| = 1$ si ha $\|(\delta/2)x\| < \delta$ e dunque $(\delta/2)\|Tx\| = \|T(\delta/2)x\| < 1$. Allora $\|x\| = 1$ implica $\|Tx\| < (2/\delta)$. Di conseguenza T è limitato con norma $\leq (2/\delta)$. \square

Consideriamo adesso lo spazio normato $\mathcal{L}(X, Y)$ di tutti gli operatori lineari e limitati da X in Y , dove X e Y sono spazi di Banach. Scriviamo $\mathcal{L}(X)$ se $X = Y$. Se $X = F^m$ e $Y = F^n$ (per $F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$), $\mathcal{L}(X, Y)$ coincide con lo spazio delle matrici $n \times m$.

Proposizione I.4 *Siano X, Y spazi di Banach. Allora $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X, Y)$. In altre parole, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ per $n, m > \nu$. Per $x \in X$ abbiamo la successione di Cauchy $\{T_n x\}_{n=1}^\infty$ in Y . Per $x = 0$ questo è chiaro. Per $x \neq 0$ si ha: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon\|x\|$ se $n, m > \nu$, mentre $\varepsilon\|x\|$ è una costante positiva arbitraria. Siccome Y è uno spazio completo, esiste, per ogni $x \in X$, un vettore $Tx \in Y$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x - Tx\| = 0$. Si dimostra facilmente che T è un operatore lineare. Inoltre, per quel $\nu = \nu(\varepsilon)$ si ha $\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon\|x\|$ se $n > \nu$ (calcolando il limite se $m \rightarrow \infty$). Quindi per un opportuno $n_0 > \nu$ si ha

$$\|Tx\| \leq \|T_{n_0} x - Tx\| + \|T_{n_0}\|\|x\| \leq (\varepsilon + \|T_{n_0}\|)\|x\|, \quad x \in X,$$

implicando la limitatezza di T . Inoltre, siccome per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon\|x\|$ se $n > \nu$, si ha $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$. In altre parole, $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ è convergente in $\mathcal{L}(X, Y)$. \square

Discutiamo due esempi.

a. Sullo spazio ℓ^1 definiamo l'operatore A come

$$(A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}x_j, \quad \mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty},$$

dove $\{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ è una matrice infinita. Allora A è limitato se

$$\|A\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{i,j}| < +\infty.$$

Infatti, sotto questa condizione abbiamo

$$\|A\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |(A\mathbf{x})_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|x_j \leq \|A\| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|A\| \|\mathbf{x}\|_1.$$

Abbiamo infatti trovato il valore esatto della norma di A , ma questo non verrà dimostrato.

b. Sullo spazio $L^2(G)$ e per qualsiasi funzione misurabile limitata h su G definiamo l'operatore M da

$$(Mf)(x) = h(x)f(x), \quad x \in G.$$

Allora hf è misurabile se f è misurabile. Inoltre,

$$\|hf\|_2^2 = \int_G |h(x)f(x)|^2 dx \leq \|h\|_{\infty}^2 \int_G |f(x)|^2 dx = \|h\|_{\infty}^2 \|f\|_2^2,$$

dove $\|h\|_{\infty} = \sup_{x \in G} |h(x)|$. Quindi M è limitato su $L^2(G)$. Si dimostra nella stessa maniera che M è limitato su $L^1(G)$. In entrambi i casi $\|h\|_{\infty}$ è un maggiorante della norma di M . Infatti $\|h\|_{\infty}$ è il valore esatto della norma, ma questo non verrà dimostrato.

c. Sia G un aperto *limitato* in \mathbb{R}^n di misura $m(G)$. Per $\mathcal{K}(x, y)$ continua in $x, y \in \overline{G}$, si definisce l'operatore integrale K da

$$(Kf)(x) = \int_G \mathcal{K}(x, y)f(y) dy.$$

Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|\mathcal{K}(x_1, y_1) - \mathcal{K}(x_2, y_2)| < \varepsilon$ se $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_2 < \delta$.⁵ Allora $Kf \in C(\overline{G})$ per ogni $f \in L^1(G)$.

⁵Ciò segue dal seguente teorema: Ogni funzione continua su un insieme compatto è uniformemente continua.

Infatti, per $x_1, x_2 \in \overline{G}$ si ha

$$\begin{aligned} |(Kf)(x_1) - (Kf)(x_2)| &\leq \int_G |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| |f(y)| dy \\ &\leq \varepsilon \int_G |f(y)| dy = \varepsilon \|f\|_1 \text{ se } |x_1 - x_2| < \delta. \end{aligned}$$

Inoltre, $|(Kf)(x)| \leq M \int_G |f(y)| dy = M \|f\|_1$ per ogni $f \in L^1(G)$, dove $M = \max_{x, y \in \overline{G}} |\mathcal{K}(x, y)|$. Di conseguenza, K è un operatore limitato da $L^1(G)$ in $C(\overline{G})$ di norma $\leq M$. Siccome le immersioni $C(\overline{G}) \mapsto L^2(G)$ e $L^2(G) \mapsto L^1(G)$ sono operatori limitati di norma $\leq \sqrt{m(G)}$,⁶ concludiamo che K è un operatore limitato su tutti e tre spazi di Banach $C(\overline{G})$, $L^1(G)$ e $L^2(G)$, sempre di norma $\leq M\sqrt{m(G)}$.

Finora tutte le dimostrazioni sono state abbastanza elementari. Il prossimo teorema non è facile da dimostrare e richiede una certa proprietà topologica (quella di Baire) degli spazi metrici completi.

Teorema I.5 *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ invertibile. Allora l'operatore inverso $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Il prossimo teorema fornisce un algoritmo per dimostrare l'invertibilità di un operatore limitato e per calcolare (almeno in principio) la sua inversa. L'operatore inverso verrà costruito come la somma della cosiddetta *serie di Neumann* che generalizza la serie geometrica. Abbiamo bisogno dell'operatore d'identità I_X (oppure I se non c'è pericolo di confusione) su uno spazio di Banach X : Si definisca $I_X x = x$ per ogni $x \in X$.

Teorema I.6 *Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora T è invertibile se $\|I - T\| < 1$. In tal caso*

$$T^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (I - T)^j,$$

dove $(I - T)^0 = I_X$ e la serie è convergente nella norma di $\mathcal{L}(X)$.

⁶Dalla disuguaglianza di Schwartz segue $\|f\|_1 = \int_G 1 \cdot |f(y)| dy \leq \sqrt{\int_G 1^2 dy} \|f\|_2$ per ogni $f \in L^2(G)$. Inoltre, $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \sqrt{\int_G 1^2 dy}$ per ogni $f \in \overline{G}$. Si ha $\int_G 1^2 dy = m(G)$.

Dimostrazione. Consideriamo le somme parziali⁷

$$S_n = I + (I - T) + (I - T)^2 + \cdots + (I - T)^n = \sum_{j=0}^n (I - T)^j.$$

Si vede subito (o quasi subito) che

$$TS_n = S_n T = S_n - (I - T)S_n = S_n - S_{n+1} + I. \quad (\text{I.2})$$

Adesso facciamo la stima [Vedi l'esercizio 1.9]

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{n+p} (I - T)^j \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{n+p} \|I - T\|^j \leq \frac{\|I - T\|^{n+1}}{1 - \|I - T\|},$$

ciò implica che $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X)$. Dalla Proposizione I.4 segue l'esistenza di $S \in \mathcal{L}(X)$ tale che $\|S_n - S\| \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$. Calcolando il limite in (I.2) se $n \rightarrow \infty$, otteniamo

$$TS = ST = S - (I - T)S = S - S + I.$$

Di conseguenza $TS = ST = I$, cioè $S = T^{-1}$. □

Dalla serie di Neumann si ottiene facilmente

$$\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - T\|}$$

se $\|I - T\| < 1$.

Corollario I.7 *Siano X, Y spazi di Banach, $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$ e T invertibile. Se*

$$\|T - S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|},$$

allora S è invertibile. In altre parole, l'insieme degli operatori invertibili in $\mathcal{L}(X, Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X, Y)$.

Dimostrazione. Ovviamente, $T^{-1}S \in \mathcal{L}(X)$. Inoltre,

$$\|I_X - T^{-1}S\| = \|T^{-1}[T - S]\| \leq \|T^{-1}\| \|T - S\| < \|T^{-1}\| \|T^{-1}\|^{-1} = 1$$

implica (secondo il teorema precedente) che $T^{-1}S$ è invertibile. In tal caso S è invertibile. □

⁷Questo teorema si può anche dimostrare utilizzando il fatto che per ogni $y \in X$ la mappa $F : X \rightarrow X$ definita da $F(x) = Tx + y$ per $x \in X$ è una contrazione e quindi l'equazione $F(x) = x$ ha un unico punto fisso.

7 Spettro di un operatore lineare

Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ consideriamo gli operatori lineari $\lambda - T$ (cioè, $\lambda I_X - T$ scritto male). Studiamo l'invertibilità di $\lambda - T$ al variare di λ .

Il numero $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice *autovalore* di T se esiste $0 \neq x \in X$ tale che $(\lambda - T)x = 0$ (cioè, tale che $Tx = \lambda x$). Il vettore x si chiama un corrispondente *autovettore*. In tal caso $\text{Ker}(\lambda - T) = \{x \in X : (\lambda - T)x = 0\}$ è l'insieme di tutti gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ , più il vettore zero. La definizione generalizza quella per le matrici quadrate. Infatti, come per le matrici quadrate l'esistenza dell'autovettore $0 \neq x \in X$ tale che $Tx = \lambda x$ implica che $\lambda - T$ non è invertibile. Per le matrici quadrate T basta risolvere l'equazione $\det(\lambda - T) = 0$ per trovare tutti gli autovalori di T . Nel caso di uno spazio X a dimensione infinita la situazione è molto più complicata.

Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Il numero complesso λ appartiene allo *spettro* di T , $\sigma(T)$, se $\lambda - T$ NON è invertibile. Quindi tutti gli autovalori di T appartengono allo spettro di T . Il numero complesso λ appartiene al *risolvente* di T , $\rho(T)$, se $\lambda - T$ è invertibile. Dunque $\rho(T)$ è il complementare di $\sigma(T)$.

Teorema I.8 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora lo spettro $\sigma(T)$ di T è un sottoinsieme non vuoto, chiuso e limitato di \mathbb{C} , mentre il risolvente $\rho(T)$ di T è un aperto non limitato.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \rho(T)$. Se $|\mu - \lambda| < \|(\lambda - T)^{-1}\|^{-1}$, allora $\mu \in \rho(T)$. Questo segue subito dal Corollario I.7, poichè $(\mu - \lambda)I_X = (\mu - T) - (\lambda - T)$. Quindi $\rho(T)$ è un aperto in \mathbb{C} .

Se $|\lambda| > \|T\|$, $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ implica l'invertibilità dell'operatore $\lambda - T = \lambda(I_X - \lambda^{-1}T)$. Inoltre

$$(\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{\lambda^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{\lambda^{j+1}}, \quad (\text{I.3})$$

dove la serie è convergente nella norma di $\mathcal{L}(X)$. Quindi lo spettro è un insieme chiuso contenuto nella palla di centro zero e raggio $\|T\|$.

Utilizzando il teorema di Liouville dell'analisi complessa,⁸ si può dimostrare che lo spettro di un operatore lineare limitato non è mai vuoto. Quindi il suo risolvente non è mai l'intero piano complesso. \square

Sia $r(T)$, il *raggio spettrale* di T , il minimo di tutti gli r per cui la serie (I.3) è assolutamente convergente per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > r$. Allora $r(T) \leq \|T\|$ e

⁸Teorema di Liouville: Una funzione analitica $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ limitata è costante.

$\sigma(T)$ è contenuto nel disco di centro 0 e raggio $r(T)$. Infatti quel disco è il disco di centro 0 più piccolo che contiene lo spettro di T . Utilizzando l'espressione per il raggio di convergenza di una serie di potenze, troviamo

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. La formula $\mathbb{C} = \sigma(T) \cup \rho(T)$ rappresenta una partizione del piano complesso in due insiemi disgiunti. Adesso discutiamo un'ulteriore suddivisione di \mathbb{C} in quattro insiemi due a due disgiunti.

- a. Se $\lambda - T$ è invertibile, $\lambda \in \rho(T)$. Altrimenti, $\lambda \in \sigma(T)$.
- b. Se $\text{Ker}(\lambda - T) = \{0\}$, $\text{Im}(\lambda - T)$ è un sottospazio lineare denso in X e $\text{Im}(\lambda - T) \neq X$, si ha $\lambda \in \sigma_c(T)$. Tali punti λ appartengono allo spettro continuo di T . In tal caso ogni $x \in X$ si può approssimare da vettori $(\lambda - T)z$ per qualche $z \in X$. Purtroppo esistono $x \in X$ tale che l'equazione $(\lambda - T)z = x$ non ha nessuna soluzione $z \in X$.
- c. Se $\text{Ker}(\lambda - T) = \{0\}$ e $\text{Im}(\lambda - T)$ è un sottospazio NON denso in X , si ha $\lambda \in \sigma_r(T)$ [lo spettro residuo di T].
- d. Se $\text{Ker}(\lambda - T) \neq \{0\}$, λ è un autovalore di T . L'insieme degli autovalori si scrive come $\sigma_p(T)$ [inglese: point spectrum]. Gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ sono tutti i vettori in $\text{Ker}(\lambda - T) \setminus \{0\}$.

Abbiamo ottenuto la partizione

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \underbrace{\sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_p(T)}_{\sigma(T)}$$

del piano complesso in quattro insiemi due a due disgiunti.

Per determinare lo spettro continuo più facilmente, dimostriamo il seguente lemma.

Lemma I.9 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Sia $\sigma_{ap}(T)$ ⁹ l'insieme di tutti i λ tali che $\|(\lambda - T)x_n\| \rightarrow 0$ per un'opportuna successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\|x_n\| = 1$. Allora*

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T).$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Se $\lambda \in \sigma_p(T)$ e $0 \neq x \in X$ è un corrispondente autovettore, prendiamo $x_n = (x/\|x\|)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In tal caso $(\lambda - T)x_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue che $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$. Quindi $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

⁹L'insieme si dice *approximate point spectrum*.

Se $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $\|(\lambda - T)x\| \geq \varepsilon$ se $\|x\| = 1$. In tal caso si ha

$$\|(\lambda - T)x\| \geq \varepsilon\|x\|, \quad x \in X.$$

Quindi λ non è un autovalore di T . Se $y \in \text{Im}(\lambda - T)$, esiste un unico vettore $x \in X$ tale che $(\lambda - T)x = y$. In tal caso

$$\|(\lambda - T)^{-1}y\| \leq \varepsilon^{-1}\|y\|, \quad y \in \text{Im}(\lambda - T). \quad (\text{I.4})$$

Se $\text{Im}(\lambda - T)$ non è denso in X , ne segue che $\lambda \in \sigma_r(T)$. Se $\text{Im}(\lambda - T)$ è denso in X , la stima (I.4) si estende ad $y \in X$ per continuità, e dunque $\lambda \in \rho(T)$. In altre parole, $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T) \subset \rho(T) \cup \sigma_r(T)$, oppure $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Se $\lambda \in \rho(T)$, esistono $M, m > 0$ tali che $M\|x\| \geq \|(\lambda - T)x\| \geq m\|x\|$ per ogni $x \in X$ (infatti, $M = \|\lambda - T\|$ e $m = \|(\lambda - T)^{-1}\|^{-1}$). Quindi se $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ è una successione con $\|x_n\| = 1$, non si ha $\|(\lambda - T)x_n\| \rightarrow 0$. Quindi $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$. Ne segue che $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$. \square

8 Operatori lineari autoaggiunti e unitari

Discutiamo ora gli operatori lineari su uno spazio di Hilbert. Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si definisce l'operator aggiunto T^* dall'uguaglianza

$$(T^*x, y) = (x, Ty), \quad x, y \in X.$$

Si dimostra facilmente che

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T^*x\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} | \langle T^*x, y \rangle | \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} | \langle x, Ty \rangle | = \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| = \|T\|. \end{aligned}$$

Quindi $T^* \in \mathcal{L}(X)$ e $\|T^*\| = \|T\|$.

È facile dimostrare le seguenti proprietà:

$$(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*, \quad (T + S)^* = T^* + S^*, \quad (TS)^* = S^*T^*, \quad (T^*)^* = T.$$

Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Introduciamo le seguenti classi di operatori lineari:

- Gli operatori *autoaggiunti*: $T^* = T$.
- Gli operatori *unitari*: T invertibile e $T^{-1} = T^*$.
- Gli operatori *normali*: $TT^* = T^*T$. Osserviamo che gli operatori autoaggiunti e unitari sono ambedue normali.

Sia X uno spazio di Hilbert *complesso* e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si dimostri che T è autoaggiunto se e solo se (Tx, x) è un numero reale per ogni $x \in X$. Si consiglia sviluppare il prodotto scalare $(T(x + iy), x + iy)$ per $x, y \in X$, utilizzando che $(Tz, z) \in \mathbb{R}$ per $z = x$, $z = y$ e $z = x + iy$. Il risultato non vale in uno spazio di Hilbert reale.

Teorema I.10 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore autoaggiunto. Allora*

$$\sigma(T) \subset \{(Tx, x) : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}.$$

Inoltre, $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$. Secondo il Lemma I.9 esiste una successione $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ in X tale che $\|x_n\| = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) e $\|(\lambda - T)x_n\| \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$. Allora la stima $|((\lambda - T)x_n, x_n)| \leq \|(\lambda - T)x_n\| \|x_n\|$ con $\|x_n\| = 1$ implica che

$$\lambda - (Tx_n, x_n) = ((\lambda - T)x_n, x_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{I.5})$$

Siccome $(Tx_n, x_n) \in \mathbb{R}$ per $n \in \mathbb{N}$, segue $\lambda \in \mathbb{R}$. Dunque $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \mathbb{R}$.

Sia $\lambda \in \sigma_r(T)$. Siccome $\text{Im}(\lambda - T)$ è un sottospazio lineare non denso in X , esiste $0 \neq x \in X$ tale che $((\lambda - T)z, x) = 0$ per ogni $z \in X$. In tal caso segue, per $z = x$,

$$\lambda = \frac{(Tx, x)}{(x, x)} \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\sigma_r(T) \subset \mathbb{R}$. Da questo fatto si trova per ogni $z \in X$

$$0 = ((\lambda - T)z, x) = (z, (\bar{\lambda} - T)x),$$

e quindi $(\bar{\lambda} - T)x = 0$ mentre $x \neq 0$. Risulta che $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T)$. Siccome $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$, si ha $\lambda \in \sigma_p(T)$. Contraddizione. Segue allora che $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Infine, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ e la relazione (I.5) [dove $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$] implicano che lo spettro di T è contenuto nell'intervallo chiuso e limitato più piccolo che contiene l'insieme $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$. Infatti, sia $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\} \subset [m, M]$. Allora

$$m\|x\|^2 \leq (Tx, x) \leq M\|x\|^2, \quad x \in X.$$

Dunque per ogni $x \in X$

$$\begin{cases} \lambda > M : & (\lambda - M)\|x\|^2 \geq ((\lambda - T)x, x) \geq (\lambda - m)\|x\|^2 \\ \lambda < m : & (m - \lambda)\|x\|^2 \leq ((T - \lambda)x, x) \leq (M - \lambda)\|x\|^2. \end{cases}$$

Di conseguenza, se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$, non esiste nessuna successione $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tale che $\|x_n\| = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) e $\|(\lambda - T)x_n\| \rightarrow 0$. Quindi $\sigma(T) \subset [m, M]$. \square

Si può infatti dimostrare che per un operatore lineare autoaggiunto l'insieme $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$ è l'intervallo chiuso e limitato reale più piccolo che contiene lo spettro di T . In particolare, gli estremi di quell'intervallo appartengono a $\sigma(T)$. Purtroppo la dimostrazione non è elementare.

Teorema I.11 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore autoaggiunto. Allora il suo raggio spettrale coincide con la sua norma: $r(T) = \|T\|$.*

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ autoaggiunto. Allora

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^2x, x) \leq \|T^2x\|\|x\|, \quad x \in X,$$

dove è stata applicata la disuguaglianza di Schwartz. Passando all'estremo superiore per gli $x \in X$ con $\|x\| = 1$ si ottiene $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$ e dunque [Vedi l'esercizio 1.9]

$$\|T^2\| = \|T\|^2.$$

Questo implica

$$\|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite se $n \rightarrow \infty$ si trova $r(T) = \|T\|$. □

Passiamo ora agli operatori unitari. Utilizzando la formula di polarizzazione si può dimostrare che un'isometria (cioè, un operatore lineare U su uno spazio di Hilbert X tale che $\|U\varphi\| = \|\varphi\|$ per ogni $\varphi \in X$) ha la proprietà

$$(U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi), \quad \varphi, \psi \in X,$$

e quindi la proprietà

$$(U^*U\varphi, \psi) = (\varphi, \psi), \quad \varphi, \psi \in X.$$

Quest'ultimo implica che U è un'isometria in X se e solo se $U^*U = I_X$. Nella stessa maniera si vede che un operatore U ha la proprietà che U^* è un'isometria se e solo se $UU^* = I_X$. Conclusione: U è un operatore unitario se e solo se U e U^* sono ambedue isometrie se e solo se U è un'isometria invertibile. Siccome in tal caso anche U^n e $U^{-n} = (U^{-1})^n$ sono isometrie ($n = 1, 2, 3, \dots$) se U è unitario, risulta

$$\|U^n\| = \|U^{-n}\| = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Di conseguenza,

$$r(U) = r(U^{-1}) \leq 1,$$

e quindi $\sigma(U) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Infine, un operatore autoaggiunto T si dice *positivo* (si scrive $T \geq 0$) se $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in X$. È facile vedere che $T \geq 0$ se e solo se $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$. Gli operatori positivi ci consentono ad ordinare gli operatori autoaggiunti nel seguente modo:

$$A \geq B \Leftrightarrow B \leq A \Leftrightarrow A - B \geq 0 \Leftrightarrow \sigma(A - B) \subset \mathbb{R}^+.$$

Teorema I.12 *Per ogni operatore lineare positivo T esiste un unico operatore lineare positivo $T^{1/2}$ tale che $[T^{1/2}]^2 = T$. Inoltre, $T^{1/2}$ dipende da T in modo continuo.*

Dimostrazione. Consideriamo prima $T \geq 0$ tale che $\|T\| < 1$. Ponendo $S = I - T$ si vede che $S \geq 0$ e $\|S\| = \|I - T\| < 1$. Scrivendo l'equazione $(1 - Y)^2 = 1 - S = T$ nella forma

$$Y = \frac{1}{2}(S + Y^2),$$

facciamo la seguente iterazione:¹⁰

$$Y_0 = 0, \quad Y_{n+1} = \frac{1}{2}(S + Y_n^2). \quad (\text{I.6})$$

Dunque

$$Y_0 = 0, \quad Y_1 = \frac{1}{2}S, \quad Y_2 = \frac{1}{2}S + \frac{1}{8}S^2, \quad Y_3 = \frac{1}{2}S + \frac{1}{8}S^2 + \frac{1}{16}S^3 + \frac{1}{128}S^4.$$

In generale si ha

$$\begin{cases} 0 = Y_0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq Y_3 \leq \dots \leq I, \\ \sum_{j=1}^{2^{n-2}} \gamma_j S^j \leq Y_n \leq \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \gamma_j S^j, \end{cases}$$

dove

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \sqrt{1 - z} = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j z^j, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_j = \frac{(2j-3)!!}{2^j(j!)}.$$

Siccome $\{\langle Y_n x, x \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione di numeri non negativi limitati superiormente da $\|x\|^2$, esiste il suo limite. Utilizzando la (I.1), si ottiene anche

¹⁰Applicandola alle matrici positive, l'iterazione risulta matematicamente convergente ma numericamente instabile.

l'esistenza del limite della successione $\{\langle Y_n x, y \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ per ogni $x, y \in X$. Allora esiste un operatore lineare Y su X tale che

$$\langle Yx, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Y_n x, y \rangle, \quad x, y \in X.$$

Risulta subito che Y è autoaggiunto and soddisfa $0 \leq Y \leq I$. Dalla (I.6) segue che $Y = \frac{1}{2}(S + Y^2)$ e quindi che

$$(I - Y)^2 = I - S = T,$$

mentre $I - Y \geq 0$. Risulta inoltre la formula

$$Y = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j S^j. \quad (\text{I.7})$$

Siano ora $T^{(1)}$ e $T^{(2)}$ due operatori positivi di norma < 1 . Poniamo $S^{(k)} = I - T^{(k)}$ per $k = 1, 2$ e costruiamo i due operatori positivi $Y^{(1)}$ e $Y^{(2)}$ di norma < 1 tali che $(I - Y^{(k)})^2 = I - S^{(k)} = T^{(k)}$ per $k = 1, 2$. Dalla (I.7) segue che

$$\begin{aligned} \|Y^{(1)} - Y^{(2)}\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \|S^{(1)j} - S^{(2)j}\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \|S^{(1)} - S^{(2)}\| \sum_{k=0}^{j-1} \|S^{(1)}\|^k \|S^{(2)}\|^{j-1-k} \\ &\leq \|S^{(1)} - S^{(2)}\| \sum_{j=1}^{\infty} j \gamma_j (\max(\|S^{(1)}\|, \|S^{(2)}\|))^j \\ &= \|S^{(1)} - S^{(2)}\| f'(\max(\|S^{(1)}\|, \|S^{(2)}\|)) \\ &= \frac{\|S^{(1)} - S^{(2)}\|}{2\sqrt{1 - \max(\|S^{(1)}\|, \|S^{(2)}\|)}} \\ &= \frac{\|T^{(1)} - T^{(2)}\|}{2\sqrt{1 - \max(\|I - T^{(1)}\|, \|I - T^{(2)}\|)}}. \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

Di conseguenza, $I - Y$ dipende da T in modo continuo.

Consideriamo ora un operatore positivo T , non necessariamente di norma < 1 . In tal caso esiste una costante $c > 0$ tale che $cT \geq 0$ e $\|cT\| = c\|T\| < 1$. Costruiamo ora un operatore $Z \geq 0$ tale che $Z^2 = cT$. In tal caso $c^{-1/2}Z \geq 0$ e $[c^{-1/2}Z]^2 = T$. \square

9 Operatori Compatti in Spazi di Hilbert

Siano X e Y due spazi di Hilbert. Un operatore lineare $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ si dice *operatore di rango finito* se il suo immagine è un sottospazio di Y di dimensione finita. Se $m = \dim \operatorname{Im} K$, esistono due sottoinsiemi $\{x_1, \dots, x_m\}$ in X e $\{y_1, \dots, y_m\}$ in Y linearmente indipendenti tali che

$$Kz = \sum_{j=1}^m \langle z, x_j \rangle y_j. \quad (\text{I.9})$$

Esempio I.13 Siano G un aperto di \mathbb{R}^n e $X = Y = L^2(G)$. Se K è un operatore su $L^2(G)$ di rango finito, allora esistono due sottoinsiemi $\{f_1, \dots, f_m\}$ e $\{g_1, \dots, g_m\}$ linearmente indipendenti di $L^2(G)$ tali che

$$(Kh)(x) = \sum_{j=1}^m f_j(x) \int_G \overline{g_j(y)} h(y) dy = \int_G \left(\sum_{j=1}^m f_j(x) \overline{g_j(y)} \right) h(y) dy, \quad x \in G,$$

per ogni $h \in L^2(G)$. In altre parole, K è un operatore integrale su $L^2(G)$ con nucleo degenere

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{j=1}^m f_j(x) \overline{g_j(y)}.$$

Esempio I.14 Sia $X = Y = \ell^2$. Se K è un operatore su ℓ^2 di rango finito, allora esistono due sottoinsiemi $\{\mathbf{c}^{(1)}, \dots, \mathbf{c}^{(m)}\}$ e $\{\mathbf{d}^{(1)}, \dots, \mathbf{d}^{(m)}\}$ linearmente indipendenti di ℓ^2 , con $\mathbf{c}^{(j)} = \{c_k^{(j)}\}_{k=1}^\infty$ e $\mathbf{d}^{(j)} = \{d_k^{(j)}\}_{k=1}^\infty$, tali che

$$(K\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^m c_i^{(j)} \sum_{k=1}^\infty \overline{d_k^{(j)}} x_k = \sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^m c_i^{(j)} \overline{d_k^{(j)}} \right) x_k$$

per ogni $\mathbf{x} = \{x_j\}_{j=1}^\infty \in \ell^2$. Dunque K è un operatore integrale degenere con nucleo integrale

$$\mathcal{K}_{i,k} = \sum_{j=1}^m c_i^{(j)} \overline{d_k^{(j)}}.$$

Un operatore lineare $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ di rango finito ha la seguente proprietà: Se $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ è una successione limitata in X , allora $\{Kx_n\}_{n=1}^\infty$ ha una sottosuccessione convergente in Y .¹¹

¹¹Teorema di Bolzano-Weierstrass: Ogni successione limitata in \mathbb{R}^n ha una sottosuccessione convergente in \mathbb{R}^n . Siccome $\operatorname{Im} K$ ha dimensione finita e si può quindi identificare con \mathbb{C}^n (oppure con \mathbb{R}^{2n}), segue la proprietà di compattezza di K .

Definizione I.15 Un operatore lineare $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ si dice *operatore compatto* se manda ogni successione limitata $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ in X in una successione $\{Kx_n\}_{n=1}^\infty$ in Y con sottosuccessione convergente in Y . Ovviamente tutti gli operatori di rango finito sono compatti.

Gli operatori compatti hanno le seguenti proprietà:

1. Tutte le combinazioni lineari finite degli operatori compatti sono operatori compatti. Quindi gli operatori compatti costituiscono uno spazio vettoriale complesso.
2. Se un operatore compatto viene moltiplicato dalla sinistra o dalla destra da un operatore limitato, resta comunque compatto.
3. Se $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ è una successione di operatori compatti e $\|K_n - K\| \rightarrow 0$, allora K è compatto. In particolare, tutti gli operatori lineari ottenuti come limite nella norma degli operatori di rango finito sono compatti.¹²
4. Se $K : X \rightarrow Y$ è compatto, anche $K^* : Y \rightarrow X$ è compatto.
5. Se K è positivo e compatto, anche $K^{1/2}$ è positivo e compatto.¹³
6. DI CONSEGUENZA: Se $K : X \rightarrow Y$ è compatto, allora $(KK^*)^{1/2} : Y \rightarrow Y$ e $(K^*K)^{1/2} : X \rightarrow X$ sono positivi e compatti.

Passiamo ora al cosiddetto principio di Rayleigh-Ritz.

Lemma I.16 Sia $0 \neq K : X \rightarrow X$ un operatore compatto positivo. Allora la sua norma $\|K\|$ è un autovalore di molteplicità finita.

Dimostrazione. Sia $K \neq 0$ un operatore compatto e positivo su X . Allora $\|K\| > 0$. Esiste una successione di vettori $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ di norma 1 tali che

$$\|K\| \geq \|K\psi_n\| > \|K\|(1 - \frac{1}{n}).$$

Siccome K è compatto, la successione $\{K\psi_n\}_{n=1}^\infty$ ha una sottosuccessione convergente in X . Dunque esiste $\{\psi_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ tale che $\|K\psi_{n_i} - \phi\| \rightarrow 0$ per un opportuno $\phi \in X$.

¹²Non ci sono altri operatori compatti: Ogni operatore compatto può essere approssimato nella norma da operatori di rango finito.

¹³Scegliendo $T = cK$ per $c > \|K\|^{-1}$ e approssimando K da operatori positivi K_n di rango finito, si può applicare la (I.8) per dimostrare che gli approssimanti $K_n^{1/2}$ sono di rango finito e tendono a K in norma. Quindi $K^{1/2}$ è compatto.

Ora facciamo il seguente calcolo:

$$\begin{aligned}
\|K^2\psi_{n_l} - \|K\|^2\psi_{n_l}\|^2 &= \langle K^2\psi_{n_l} - \|K\|^2\psi_{n_l}, K^2\psi_{n_l} - \|K\|^2\psi_{n_l} \rangle \\
&= \langle K^2\psi_{n_l}, K^2\psi_{n_l} \rangle + \|K\|^4 \langle \psi_{n_l}, \psi_{n_l} \rangle \\
&\quad - \|K\|^2 \langle \psi_{n_l}, K\psi_{n_l} \rangle - \|K\|^2 \langle K\psi_{n_l}, \psi_{n_l} \rangle \\
&= \|K^2\psi_{n_l}\|^2 + \|K\|^4 - 2\|K\|^2 \|K\psi_{n_l}\|^2 \\
&\leq \|K\|^2 \|K\psi_{n_l}\|^2 + \|K\|^4 - 2\|K\|^2 \|K\psi_{n_l}\|^2 \\
&= \|K\|^2 (\|K\|^2 - \|K\psi_{n_l}\|^2) \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Siccome $\|K\psi_{n_l} - \phi\| \rightarrow 0$ e K è limitato, si ha

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left\| \psi_{n_l} - \frac{K^2\phi}{\|K\|^2} \right\| = 0.$$

Applicando l'operatore K alla relazione precedente risulta

$$K^2\phi = \|K\|^2\phi, \tag{I.10}$$

mentre $\|\phi\| = \lim_{l \rightarrow \infty} \|K\psi_{n_l}\| = 1$. Scrivendo la (I.10) nella forma

$$(K + \|K\| I_X)(K - \|K\| I_X)\phi = 0$$

e utilizzando l'invertibilità del fattore sinistro (dim: $K \geq 0$ e dunque $\sigma(K + \|K\| I_X) \subset [\|K\|, +\infty)$) otteniamo $K\phi = \|K\|\phi$ per un vettore $\phi \in X$ di norma 1. Di conseguenza, $\|K\|$ è autovalore di K .

Consideriamo ora il sottospazio lineare non banale

$$M = \{x \in X : Kx = \|K\|x\}$$

di X . Dalla compattezza dell'operatore K segue che tutte le successioni limitate in M hanno una sottosuccessione convergente in X . Ciò implica¹⁴ che M ha dimensione finita. In altre parole, la molteplicità dell'autovalore $\|K\|$ è finita. \square

Sia K un operatore positivo e compatto su X e sia $K \neq 0$. Allora

$$s_1(K) = \|K\| = \max_{\|\phi\|=1} \|K\phi\|$$

definisce l'autovalore più grande, secondo il *principio di Rayleigh-Ritz*. Sia φ_1 il corrispondente autovettore di norma 1. Ponendo

$$K_1 = K - s_1(K)\langle \cdot, \varphi_1 \rangle \varphi_1,$$

ci sono due possibilità:

¹⁴Sulla base del cosiddetto Teorema di Mazur: Uno spazio di Banach Y ha dimensione finita se e solo se ogni successione limitata in Y ha una sottosuccessione convergente in Y .

- a. $K_1 = 0$. In tal caso $K = s_1(K)\langle \cdot, \varphi_1 \rangle \varphi_1$ ha rango 1.
- b. $K_1 \neq 0$. In tal caso K e K_1 hanno gli stessi autovalori, ma la molteplicità dell'autovalore $s_1(K)$ viene ridotta da 1 (cioè, $s_1(K)$ non è autovalore di K_1 se la molteplicità era già 1). Applicando il principio di Rayleigh-Ritz all'operatore positivo e compatto K_1 troviamo

$$s_2(K) = s_1(K_1) = \|K_1\| = \max_{\|\phi\|=1} \|K_1\phi\| = \max_{\substack{\|\phi\|=1 \\ \langle \phi, \varphi_1 \rangle = 0}} \|K\phi\|.$$

Sia ora φ_2 un vettore di norma 1 tale che $K_1\varphi_2 = s_2(K)\varphi_2$. Allora $\varphi_2 \perp \varphi_1$ e $K\varphi_2 = s_2(K)\varphi_2$.

Supponiamo ora che abbiamo trovato gli autovalori $s_1(K) \geq s_2(K) \geq \dots \geq s_n(K)$ e i vettori ortonormali $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tali che $K\varphi_j = s_j(K)\varphi_j$ per $j = 1, \dots, n$. Ponendo

$$K_n = K - \sum_{j=1}^n s_j(K)\langle \cdot, \varphi_j \rangle \varphi_j,$$

ci sono due possibilità:

- a. $K_n = 0$. In tal caso

$$K = \sum_{j=1}^n s_j(K)\langle \cdot, \varphi_j \rangle \varphi_j$$

è un operatore di rango n .

- b. $K_n \neq 0$. In tal caso K e K_n hanno gli stessi autovalori (tranne i primi n) e corrispondenti autovettori. Applicando il principio di Rayleigh-Ritz all'operatore positivo e compatto K_n troviamo

$$s_{n+1}(K) = s_1(K_n) = \|K_n\| = \max_{\|\phi\|=1} \|K_n\phi\| = \max_{\substack{\|\phi\|=1 \\ \langle \phi, \varphi_j \rangle = 0 \\ \text{per } j=1, \dots, n}} \|K\phi\|.$$

Sia ora φ_{n+1} un vettore di norma 1 tale che $K_n\varphi_{n+1} = s_{n+1}(K)\varphi_{n+1}$. Allora φ_{n+1} è ortogonale ai vettori $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ e $K\varphi_{n+1} = s_{n+1}(K)\varphi_{n+1}$.

Concludendo, arriviamo ad una delle seguenti due situazioni:

- a. K è un operatore di rango finito:

$$K = \sum_{j=1}^n s_j(K)\langle \cdot, \varphi_j \rangle \varphi_j,$$

dove $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono ortonormali e $s_1(K) \geq \dots \geq s_n(K) > 0$.

b. K è un operatore compatto di rango infinito:

$$K = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(K) \langle \cdot, \varphi_j \rangle \varphi_j,$$

dove $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ è un sistema ortonormale e $s_1(K) \geq \dots \geq s_n(K) \geq \dots > 0$.
La somma viene interpretata nel seguente modo:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| Kx - \sum_{j=1}^N s_j(K) \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=N+1}^{\infty} s_j(K)^2 |\langle x, \varphi_j \rangle|^2 = 0,$$

dove è stata applicata l'identità di Parseval.

Ora dimostriamo la *singular value decomposition* (SVD) per un operatore compatto arbitrario. I numeri $\{s_j(K)\}_{j=1}^{\infty}$ si chiamano i *numeri singolari* di K . Se K ha rango finito, i suoi numeri singolari sono tutti uguali a zero tranne per un numero finito.

Teorema I.17 *Sia K un operatore compatto su K e sia $K \neq 0$. Allora esistono due sistema ortonormali $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ e una successione non crescente $s_1(K) \geq s_2(K) \geq \dots \geq 0$ in cui nessun numero positivo appare infinite volte, tali che*

$$K = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(K) \langle \cdot, \psi_j \rangle \phi_j \quad (\text{I.11})$$

nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| Kx - \sum_{j=1}^N s_j(K) \langle x, \psi_j \rangle \varphi_j \right\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=N+1}^{\infty} s_j(K)^2 |\langle x, \psi_j \rangle|^2 = 0.$$

Dimostrazione. Chiaramente gli operatori $(KK^*)^{1/2}$ e $(K^*K)^{1/2}$ sono positivi e compatti. Le identità

$$\begin{aligned} (I - \lambda KK^*)^{-1} &= I + \lambda K(I - \lambda K^*K)^{-1} K^*, \\ (I - \lambda K^*K)^{-1} &= I + \lambda K^*(I - \lambda KK^*)^{-1} K, \end{aligned}$$

dimostrano che KK^* e K^*K hanno gli stessi autovalori (con le stesse molteplicità). Dunque anche $(KK^*)^{1/2}$ e $(K^*K)^{1/2}$ hanno gli stessi autovalori (con le stesse molteplicità). Definiamo ora

$$s_j(K) \stackrel{\text{def}}{=} s_j((KK^*)^{1/2}) = s_j((K^*K)^{1/2}), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Se $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ è il sistema ortonormale di autovettori dell'operatore $(K^*K)^{1/2}$ tale che $(K^*K)^{1/2}\psi_j = s_j(K)\psi_j$ per $j = 1, 2, 3, \dots$, allora

$$(K^*K)^{1/2} = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(K) \langle \cdot, \psi_j \rangle \psi_j.$$

Siccome

$$\|(K^*K)^{1/2}x\|^2 = \langle K^*Kx, x \rangle = \langle Kx, Kx \rangle = \|Kx\|^2,$$

abbiamo: (i) $\text{Ker } K = \text{Ker } (K^*K)^{1/2}$, e (ii) esiste un'isometria $U : X \rightarrow X$ tale che $K = U(K^*K)^{1/2}$. Ora poniamo $\varphi_j = U\psi_j$ per $j = 1, 2, 3, \dots$. Allora $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ è il sistema ortonormale di autovettori dell'operatore $(KK^*)^{1/2}$ tale che $(KK^*)^{1/2}\varphi_j = s_j(K)\varphi_j$ per $j = 1, 2, 3, \dots$, mentre

$$(KK^*)^{1/2} = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(K) \langle \cdot, \varphi_j \rangle \varphi_j.$$

Dalle ultime due relazioni si ottiene facilmente la (I.11). \square

Un operatore compatto K si dice *di Hilbert-Schmidt* se i suoi numeri singolari hanno la seguente proprietà:¹⁵

$$\text{Tr}(K^*K) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} s_n(K^*K) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(K)^2 < +\infty. \quad (\text{I.12})$$

Esempio I.18 Sia Ω un dominio aperto in \mathbb{R}^n . Sia K il seguente operatore integrale su $L^2(\Omega)$:

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y)u(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Se $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ sono le autofunzioni normalizzate dell'operatore $(K^*K)^{1/2}$ (e dunque anche dell'operatore K^*K), risulta

$$\begin{aligned} \text{Tr}(K^*K) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle K^*K\psi_n, \psi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \|K\psi_n\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y)\psi_n(y) dy \right|^2 dx \end{aligned}$$

¹⁵In analogia con la traccia di una matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ uguale alla somma dei suoi autovalori, $\text{Tr}(K^*K)$ si chiama la *traccia* di K^*K .

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y) \overline{\mathcal{K}(x, z)} dx \right) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(y) \overline{\psi_n(z)} dy dz}_{\delta(y-z)} \\
&= \int_{\Omega} \int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy,
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato l'identità di Parseval.¹⁶ Quindi gli operatori integrali di tipo Hilbert-Schmidt sono esattamente quelli per cui il kernel $\mathcal{K} \in L^2(\Omega \times \Omega)$.

Esempio I.19 Sia $(k_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ una matrice infinita tale che l'operatore $K : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definita da

$$(K\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x_j, \quad \mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2,$$

è compatto su ℓ^2 . Se $\{\psi^n\}_{n=1}^{\infty}$, essendo $\psi^n = (\psi_i^n)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$ di norma 1, sono gli autovettori normalizzati dell'operatore $(K^*K)^{1/2}$, risulta

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(K^*K) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle K^*K\psi^n, \psi^n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \|K\psi^n\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} \psi_j^n \right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} k_{ij} \overline{k_{il}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\psi_j^n \overline{\psi_l^n}}_{\delta_{jl}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}|^2,
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato l'identità di Parseval.¹⁷ Quindi gli operatori lineari di tipo Hilbert-Schmidt sono esattamente le matrici infinite $k \in \ell^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, cioè le successioni complesse al quadrato sommabili rispetto a due indici $i, j \in \mathbb{N}$.

¹⁶Se $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ non è una base ortonormale di $L^2(\Omega)$, bisogna estenderla aggiungendo una base ortonormale di $\text{Ker}(K^*K)$. Ciò non influisce sul risultato finale.

¹⁷Se $\{\psi^n\}_{n=1}^{\infty}$ non è una base ortonormale di ℓ^2 , bisogna estenderla aggiungendo una base ortonormale di $\text{Ker}(K^*K)$. Ciò non influisce sul risultato finale.

Capitolo II

METODI ANALITICI PER LA RISOLUZIONE ESPLICITA

1 Coordinate ortogonali

Partendo dalle coordinate cartesiane $x = (x_1, x_2, x_3)$, sia $u = (u_1, u_2, u_3)$ una trasformazione delle variabili in \mathbb{R}^3 , dove $u_j = u_j(x_1, x_2, x_3)$ ($j = 1, 2, 3$) sono funzioni di classe C^2 e la matrice Jacobiana è invertibile (per x in un aperto di \mathbb{R}^3). Derivando le variabili x_1, x_2, x_3 rispetto alle nuove variabili u_1, u_2, u_3 otteniamo

$$dx_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial u_j} du_j.$$

Quindi la distanza al quadrato tra due punti vicini tra loro è

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} du_i du_j,$$

dove

$$g_{kl} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_l}$$

è la cosiddetta metrica. La trasformazione si dice *ortogonale* se la metrica $\{g_{kl}\}_{k,l=1}^3$ è una matrice diagonale, cioè se le righe della matrice Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{bmatrix}$$

sono ortogonali. In altre parole, la trasformazione si dice ortogonale se

$$g_{kl} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_l} = 0, \quad k \neq l.$$

In tal caso

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 (h_i du_i)^2,$$

dove

$$h_k = \left(\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Si vede facilmente che la matrice $\text{diag}(1/h_1, 1/h_2, 1/h_3) J$ è ortogonale (cioè, $U^{-1} = U^T$ e quindi $\det U \in \{-1, +1\}$). Dunque

$$|\det J| = h_1 h_2 h_3.$$

Per ogni punto (u_1, u_2, u_3) delle nuove coordinate per cui $\det J \neq 0$, passano tre superfici $u_i = \text{costante}$ ($i = 1, 2, 3$). In questo punto definiamo il vettore \mathbf{e}_i di lunghezza 1 normale alla superficie $u_i = \text{costante}$ e nella direzione in cui cresce u_i . In tal caso i tre vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ formano un sistema di coordinate cartesiane tale che $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) > 0$.

Il gradiente di ψ ha la forma

$$\nabla \psi = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \mathbf{e}_j,$$

la divergenza della funzione $\mathbf{V} = V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2 + V_3 \mathbf{e}_3$ a valori vettoriali ha la forma

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3} (V_3 h_1 h_2) \right],$$

e il rotore di \mathbf{V} ha la forma

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} = & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\left(\frac{\partial (h_3 V_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial (h_2 V_2)}{\partial u_3} \right) h_1 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial (h_1 V_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial (h_3 V_3)}{\partial u_1} \right) h_2 \mathbf{e}_2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial (h_2 V_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial (h_1 V_1)}{\partial u_2} \right) h_3 \mathbf{e}_3 \right]. \end{aligned}$$

Quindi l'operatore di Laplace, oppure il Laplaciano,

$$\Delta = \nabla^2 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

ha la seguente rappresentazione:

$$\Delta\psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right) \right].$$

Esempio II.20 Introduciamo ora alcuni sistemi di coordinate ortogonali.

- a. **Coordinate Cilindriche:** $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$. dove $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. Allora $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_z = 1$. In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (\text{II.1})$$

Sostituendo per ψ una funzione $\psi = \psi(r, \theta)$ che non dipende da z si trova l'operatore di Laplace in **coordinate polari**:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}. \quad (\text{II.2})$$

- b. **Coordinate Sferiche:** $x = r \sin \varphi \cos \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \varphi$, dove $r \geq 0$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Allora $h_r = 1$, $h_\varphi = r$, $h_\theta = r \sin \varphi$. In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right). \quad (\text{II.3})$$

Introducendo la nuova variabile $\xi = \cos \varphi \in [-1, 1]$ (tale che $d\xi = -\sin \varphi d\varphi$, $1 - \xi^2 = \sin^2 \varphi$) otteniamo¹

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2(1 - \xi^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1 - \xi^2) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right). \quad (\text{II.4})$$

- c. **Coordinate Parabolico-cilindriche** (vedi [11]): $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2)$, $y = cuv$, $z = z$, dove $u \in \mathbb{R}$, $v \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$, e c è una costante positiva. Allora

$$h_u = h_v = c\sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_z = 1.$$

In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2(u^2 + v^2)} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (\text{II.5})$$

¹Usando le coordinate ortogonali (r, θ, ξ) direttamente si trovano le espressioni $h_r = 1$, $h_\theta = r\sqrt{1 - \xi^2}$ e $h_\xi = (r/\sqrt{1 - \xi^2})$.

d. **Coordinate Ellittico-cilindriche** (vedi [11]): $x = c \cosh u \cos v$, $y = c \sinh u \sin v$, $z = z$, dove $u > 0$, $v \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$, e c è una costante positiva. Allora

$$\begin{cases} h_u = h_v = c\sqrt{\cosh^2 u \sin^2 v + \sinh^2 u \cos^2 v} = c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \\ h_z = 1. \end{cases}$$

In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2[\sinh^2 u + \sin^2 v]} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (\text{II.6})$$

2 Separazione delle variabili

1. Separazione in Coordinate Cartesiane. Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0$$

in tre variabili (x, y, z) per $k \geq 0$ nel dominio $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$. Ponendo

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

dove $X(x)$, $Y(y)$ e $Z(z)$ sono di classe C^2 , si trova

$$0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2.$$

In tal caso esistono tre costanti k_x^2 , k_y^2 e k_z^2 tali che

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + k_x^2 = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k_y^2 = \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k_z^2 = 0,$$

dove

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2.$$

2. Separazione in Coordinate Polari. Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0$$

in due variabili (x, y) per $k \geq 0$ nel dominio

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq L \right\},$$

dove $L \in (0, +\infty)$. Ponendo

$$\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta),$$

dove $R(r)$ e $\Theta(\theta)$ sono funzioni di classe C^2 in $r \in (0, L)$ e $\theta \in \mathbb{R}$ con $\Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta)$, si trova

$$0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 = \frac{1}{R(r)} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{r^2\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + k^2,$$

oppure

$$\frac{r^2}{R(r)} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + k^2r^2 + \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0.$$

L'espressione precedente è la somma costante di una funzione di r (che non dipende da θ) e una funzione di θ (che non dipende da r). Dunque i due termini devono essere costanti.

Proposizione II.21 *Sia $\Theta(\theta)$ una funzione di classe C^2 , non banale, tale che*

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -C, \quad \Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta).$$

Allora $C = m^2$ per qualche $m = 0, 1, 2, \dots$ e

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ \text{cost}_1 \cos m\theta + \text{cost}_2 \text{sen } m\theta, & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Dimostrazione. Prima dimostriamo che $C \geq 0$. Infatti,

$$\begin{aligned} C \int_0^{2\pi} |\Theta(\theta)|^2 d\theta &= - \int_0^{2\pi} \Theta''(\theta) \overline{\Theta(\theta)} d\theta \\ &= - \left[\Theta'(\theta) \overline{\Theta(\theta)} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} |\Theta'(\theta)|^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} |\Theta'(\theta)|^2 d\theta \geq 0, \end{aligned}$$

poichè il primo termine della seconda parte si annulla per motivi di periodicità e $\Theta'(\theta) \not\equiv 0$. Quindi $C \geq 0$.

D'altra parte, per $C > 0$ troviamo la soluzione generale

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos(\theta\sqrt{C}) + c_2 \text{sen}(\theta\sqrt{C})$$

dell'equazione $\Theta'' = -C\Theta$. Risulta il sistema di equazioni lineari

$$\begin{bmatrix} 1 - \cos(2\pi\sqrt{C}) & -\operatorname{sen}(2\pi\sqrt{C}) \\ \operatorname{sen}(2\pi\sqrt{C}) & 1 - \cos(2\pi\sqrt{C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con determinante $2(1 - \cos(2\pi\sqrt{C}))$. Il determinante si annulla se e solo se $C = m^2$ per $m \in \mathbf{N}$. In tal caso tutti gli elementi della matrice si annullano e quindi le costanti c_1 e c_2 sono arbitrarie.

Infine, per $C = 0$ troviamo la soluzione generale $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$. In tal caso $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$ implica $c_2 = 0$. \square

Sostituendo $\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2$ per $m = 0, 1, 2, \dots$, otteniamo

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] R(r) = 0$$

con le condizioni al contorno $R(0^+)$ finito e $R(L) = 0$. Se invece della condizione di Dirichlet $\psi|_{\partial D} \equiv 0$ si considera la condizione di Neumann $\frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\partial D} \equiv 0$, risultano le condizioni al contorno $R(0^+)$ finito e $R'(L) = 0$.

Per $k = 0$ si trova l'equazione di Eulero $r^2R''(r) + rR'(r) - m^2R(r) = 0$ con soluzione generale

$$R(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \log r, & m = 0 \\ c_1 r^m + c_2 r^{-m}, & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

La condizione che $R(0^+)$ sia finito, implica $c_2 = 0$. In tal caso $R(L) \neq 0$ per ogni $L > 0$, eccetto nel caso banale $c_1 = c_2 = 0$. Quindi per $k = 0$ non ci sono soluzioni non banali. Purtroppo, se studiamo l'equazione di Helmholtz con la condizione di Neumann, risulta la soluzione non banale costante se $m = 0$; per $m = 1, 2, 3, \dots$ non ci sono soluzioni non banali.

Per $k > 0$ si ponga $\rho = kr$. In tal caso risulta l'equazione di Bessel

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0.$$

Quest'equazione ha una singola soluzione linearmente indipendente limitata se $\rho \rightarrow 0^+$. Con un'opportuna normalizzazione questa soluzione si chiama $J_m(\rho)$, la cosiddetta funzione di Bessel di ordine m .

3. Separazione in Coordinate Sferiche. Consideriamo l'equazione di Schrödinger

$$\Delta\psi + k^2\psi = V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\psi$$

nelle variabili (x, y, z) per $k > 0$, dove il potenziale V dipende soltanto dalla variabile $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. È compreso il caso dell'equazione di Helmholtz ($V \equiv 0$). Ponendo

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)S(\theta, \varphi),$$

dove $R(r)$ e $S(\theta, \varphi)$ sono funzioni di classe C^2 in $r \in (0, +\infty)$ e $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times (0, \pi)$, si trova facilmente

$$0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 - V = \frac{1}{R(r)} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{r^2 S(\theta, \varphi)} \left[\frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\sin\varphi \frac{\partial S}{\partial\varphi} \right) \right] + k^2 - V(r).$$

Quindi

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\sin\varphi \frac{\partial S}{\partial\varphi} \right) = -CS(\theta, \varphi)$$

e

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{C}{r^2} \right) R(r) = V(r)R(r),$$

dove C è una costante.

L'equazione differenziale per $S(\theta, \varphi)$ ha soltanto una soluzione non banale per certi valori della costante C . Per tali valori di C le funzioni $S(\theta, \varphi)$ sono multipli delle cosiddette funzioni sferiche.

Consideriamo ora l'equazione per $S(\theta, \varphi)$. Ponendo

$$S(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi),$$

si trova

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{1}{\sin\varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\sin\varphi \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) + C = 0.$$

Come di solito,

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2,$$

dove $m = 0, 1, 2, \dots$. Utilizzando la trasformazione $X(\xi) = \Phi(\arccos \xi)$, $\xi = \cos\varphi$ arriviamo all'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi} \right) + \left(C - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) X(\xi) = 0.$$

Quest'equazione si chiama l'equazione per le funzioni associate di Legendre. Le sue soluzioni non banali limitate se $\xi \rightarrow \pm 1$ esistono soltanto per $C = l(l + 1)$

dove $l = m, m+1, m+2, \dots$. Nel caso particolare $m = 0$ si ottiene l'equazione di Legendre

$$\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi} \right) + l(l+1)X(\xi) = 0,$$

dove $l = 0, 1, 2, \dots$.

Ritorniamo all'equazione per $R(r)$ con $C = l(l+1)$:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R(r) = \left(V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r),$$

dove $m = -l, -l+1, \dots, l-2, l-1, l$.

4. Separazione in Coordinate Parabolico-Cilindriche. L'equazione di Laplace in coordinate parabolico-cilindriche (u, v, z) (anche dette coordinate paraboliche) ha la forma (II.5). Sostituendo

$$\psi(u, v, z) = U(u)V(v)Z(z)$$

otteniamo

$$\frac{1}{c^2(u^2 + v^2)} \left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)} \right) + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0.$$

Se richiediamo che $Z(z)$ sia limitata, risulta

$$\frac{1}{c^2(u^2 + v^2)} \left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)} \right) = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda^2,$$

dove $\lambda \geq 0$ è una costante. Dunque

$$\begin{aligned} U''(u) + (\mu - \lambda^2 c^2 u^2)U(u) &= 0, \\ V''(v) - (\mu + \lambda^2 c^2 v^2)V(v) &= 0, \end{aligned}$$

dove μ è un'altra costante. Introducendo le variabili $\xi = u\sqrt{c\lambda}$ e $\eta = v\sqrt{c\lambda}$, dove $\xi \in \mathbb{R}$ e $\eta \geq 0$, e ponendo $\mu = (2\nu + 1)c\lambda$ otteniamo

$$\begin{aligned} U''(\xi) + (2\nu + 1 - \xi^2)U(\xi) &= 0, \\ V''(\eta) - (2\nu + 1 + \eta^2)V(\eta) &= 0. \end{aligned}$$

Studiamo ora l'equazione

$$u'' + (2\nu + 1 - z^2)u = 0, \tag{II.7}$$

dove u, z e ν non hanno più lo stesso significato come prima. Sostituendo

$$u = e^{-z^2/2} v, \tag{II.8}$$

risulta l'equazione

$$v'' - 2zv' + 2\nu v = 0. \tag{II.9}$$

Per $\nu = 0, 1, 2, \dots$ la (II.9) si dice *equazione differenziale di Hermite*. Le soluzioni della (II.7) si dicono funzioni parabolico-cilindriche.

3 Equazione di Helmholtz

In questa parte vengono calcolati gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni normalizzate dell'equazione di Helmholtz in dominio abbastanza semplici.

3.1 Equazione di Helmholtz sull'Intervallo

Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$u'' + k^2 u = 0, \quad 0 < x < L, \quad (\text{II.10})$$

con una delle seguenti condizioni al contorno:

$$u(0) = u(L) = 0, \quad \text{Dirichlet} \quad (\text{II.11})$$

$$u'(0) = u'(L) = 0, \quad \text{Neumann} \quad (\text{II.12})$$

$$u(0) = u'(L) = 0, \quad \text{Dirichlet a sinistra, Neumann a destra} \quad (\text{II.13})$$

$$u'(0) = u(L) = 0, \quad \text{Neumann a sinistra, Dirichlet a destra} \quad (\text{II.14})$$

$$u(0) = u(L), \quad u'(0) = u'(L), \quad \text{condizioni periodiche} \quad (\text{II.15})$$

$$u(0) = 0, \quad (\cos \alpha)u(L) + (\sin \alpha)u'(L) = 0, \quad (\text{II.16})$$

$$(\cos \beta)u(0) - (\sin \beta)u'(0) = 0, \quad (\cos \alpha)u(L) + (\sin \alpha)u'(L) = 0, \quad (\text{II.17})$$

dove $0 \leq \alpha \leq (\pi/2)$ e $0 \leq \beta \leq (\pi/2)$. Le condizioni nelle (II.16) e (II.17) si chiamano miste. In tutti i casi determineremo gli autovalori e le autofunzioni del problema al contorno. In tutti i casi gli autovalori k^2 sono positivi, tranne nel caso delle condizioni di Neumann (II.12) dove uno degli autovalori si annulla.

a. Condizioni di Dirichlet. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k > 0$. Utilizzando la condizione $u(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \sin(kx).$$

L'altra condizione $u(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\sin(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = (n\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \sin(n\pi x/L)$ per $n = 1, 2, 3, \dots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{II.18})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

b. Condizioni di Neumann. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k \geq 0$. Utilizzando la condizione $u'(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \cos(kx).$$

L'altra condizione $u'(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\sin(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = (n\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \cos(n\pi x/L)$ per $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}, \\ \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, & \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

dove $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

c. Condizione di Dirichlet in $x = 0$ e di Neumann in $x = L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k > 0$. Utilizzando la condizione $u(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \sin(kx).$$

L'altra condizione $u'(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = \left((n - \frac{1}{2})\pi/L\right)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \sin\left((n - \frac{1}{2})\pi x/L\right)$ per $n = 1, 2, 3, \dots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{L}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{L}\right), \quad (\text{II.20})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

d. Condizione di Neumann in $x = 0$ e di Dirichlet in $x = L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k > 0$. Utilizzando la condizione $u'(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \cos(kx).$$

L'altra condizione $u(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = \left((n - \frac{1}{2})\pi/L\right)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \cos\left((n - \frac{1}{2})\pi x/L\right)$ per $n = 1, 2, 3, \dots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{(n - \frac{1}{2}) \pi}{L}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{(n - \frac{1}{2}) \pi x}{L}\right), \quad (\text{II.21})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

e. Condizioni periodiche. Le soluzioni non banali sono quelle periodiche. Dunque abbiamo la base ortonormale di autofunzioni (con corrispondenti autovalori)

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}, & \lambda_0 = 0, \\ \varphi_n^c(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), & \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2, \\ \varphi_n^s(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), & \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2, \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Quindi l'autovalori zero è semplice mentre gli altri autovalori hanno molteplicità 2.

f. Condizione di Dirichlet in $x = 0$ e mista in $x = L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k \geq 0$. Utilizzando la condizione $u(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \sin(kx).$$

L'altra condizione $(\cos \alpha)u(L) + (\sin \alpha)u'(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos \alpha \sin(kL) + k \sin \alpha \cos(kL) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Escludendo i casi già trattati, cioè $\alpha = 0$ [Dirichlet] e $\alpha = (\pi/2)$ [Dirichlet in $x = 0$ e Neumann in $x = L$], risultano $k > 0$, $\sin(kL) = 0$ e $\cos(kL) \neq 0$. Arriviamo all'equazione trascendentale

$$\tan(kL) = -k \tan \alpha, \quad (\text{II.23})$$

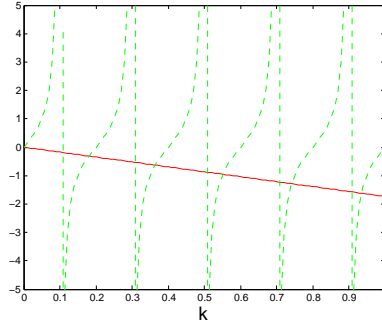


Figura II.1: Il plot contiene i grafici delle funzioni $y = \tan(xL)$ e $y = -k \tan \alpha$ per $L = 5$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Gli autovalori sono i valori di $k > 0$ corrispondenti ai loro punti di intersezione.

dove $\tan \alpha > 0$. Cercando i punti di intersezione positivi tra il grafico della funzione $k \mapsto \tan(kL)$ e la retta $k \mapsto -k \tan \alpha$ con coefficiente angolare negativo, troviamo una successione infinita di autovalori $\lambda_n = k_n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Le corrispondenti autofunzioni si possono normalizzare in $L^2(0, L)$, risultando in una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

g. Condizioni Miste Diverse. Ci limitiamo al caso in cui $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. In tal caso la soluzione

$$u(x) \sim c_1 \cos(kx) + c_2 \frac{\sin(kx)}{k}$$

per le opportune costanti c_1, c_2 e per $k > 0$ soddisfa alle due condizioni

$$c_1 \cos \beta - c_2 \sin \beta = 0, \quad (\text{II.24})$$

$$c_1 [\cos \alpha \cos(kL) - k \sin \alpha \sin(kL)] + c_2 \left[\cos \alpha \frac{\sin(kL)}{k} + \sin \alpha \cos(kL) \right] = 0. \quad (\text{II.25})$$

L'esistenza di una soluzione non banale conduce alla condizione

$$\begin{aligned} & \cos \beta \left[\cos \alpha \frac{\sin(kL)}{k} + \sin \alpha \cos(kL) \right] \\ & + \sin \beta [\cos \alpha \cos(kL) - k \sin \alpha \sin(kL)] = 0, \end{aligned}$$

oppure

$$\sin(\alpha + \beta) \cos(kL) = - \left[\frac{\cos \alpha \cos \beta}{k} - k \sin \alpha \sin \beta \right] \sin(kL).$$

Si cerchino i punti di intersezione positivi tra il grafico della funzione $k \mapsto \tan(kL)$ e quello della funzione razionale

$$k \mapsto - \frac{k \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta - k^2 \sin \alpha \sin \beta}.$$

3.2 Equazione di Helmholtz sul Rettangolo

Consideriamo ora l'equazione di Helmholtz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u(x, y) = 0, \quad (\text{II.26})$$

dove $0 < x < L_1$, $0 < y < L_2$ e vengono imposte le seguenti condizioni di Dirichlet:

$$u(x, y) = 0, \quad x = 0, L_1 \text{ oppure } y = 0, L_2. \quad (\text{II.27})$$

Separando le variabili, cioè ponendo

$$u(x, y) = X(x)Y(y),$$

e dividendo la (II.26) da $X(x)Y(y)$ otteniamo

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k^2 = 0.$$

Quindi esistono costanti k_x^2 e k_y^2 tali che

$$\begin{cases} X''(x) + k_x^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(L_1) = 0, \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

$$\begin{cases} Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(L_2) = 0, \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2. \quad (\text{II.30})$$

Quindi i problemi al contorno nelle variabili x e y sono ambedue problemi al contorno per l'equazione di Helmholtz in una variabili con le condizioni di Dirichlet. Quindi i loro autovalori e le loro autofunzioni normalizzate sono

$$(k_x^2)_n = \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L_1}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right), \quad (\text{II.31})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$, e

$$(k_y^2)_m = \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2, \quad \varphi_m(y) = \sqrt{\frac{2}{L_2}} \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right), \quad (\text{II.32})$$

dove $m = 1, 2, 3, \dots$. Di conseguenza, gli autovalori e autofunzioni normalizzate del problema bidimensionale sono

$$(k^2)_{n,m} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2}\right), \quad \varphi_{n,m}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right), \quad (\text{II.33})$$

dove $n, m = 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale in $L^2((0, L_1) \times (0, L_2))$.

Se tutte le 4 parti del bordo, $\{0\} \times [0, L_2]$, $\{L_1\} \times [0, L_2]$, $[0, L_1] \times \{0\}$ e $[0, L_1] \times \{L_2\}$, si possono imporre diverse condizioni al contorno, quali le condizioni di Dirichlet, quelle di Neumann e quelle miste. In tutti questi casi si possono separare le variabili e risolvere i problemi al contorno unidimensionali che ne risultano.

L'equazioni di Helmholtz si può risolvere per separazione delle variabili anche nei parallelepipedi multidimensionali in dimensione ≥ 3 . Per esempio, in tre dimensioni, nel dominio $(0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$, e sotto le condizioni di Dirichlet escono gli autovalori e autofunzioni

$$(k^2)_{n,m,l} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{l^2}{L_3^2}\right),$$

$$\varphi_{n,m,l}(x, y, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L_1 L_2 L_3}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{L_3}\right),$$

dove $n, m, l = 1, 2, 3, \dots$

4 Equazioni delle onde e del calore

Discutiamo ora alcuni casi in cui è abbastanza facile calcolare esplicitamente le soluzioni delle equazioni del calore e delle onde.

4.1 Equazioni delle onde e del calore sull'intervallo

Consideriamo ora l'equazione del calore per $x \in (0, L)$ con condizione iniziale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{II.34})$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (\text{II.35})$$

dove a^2 è la diffusività termica,² e quella delle onde con condizioni iniziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{II.36})$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (\text{II.37})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad (\text{II.38})$$

dove $c > 0$ è la velocità d'onda. In ambedue casi imponremo una condizioni al contorno, quali quella di Dirichlet

$$u(0, t) = u(L, t) = 0. \quad (\text{II.39})$$

Al posto delle condizioni di Dirichlet si possono imporre quelle di Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0. \quad (\text{II.40})$$

Nell'ambito dell'equazione del calore le condizioni (II.40) si chiamano condizioni di isolamento, poichè non può attraversare la frontiera alcun calore.

In ambedue i casi facciamo una separazione delle variabili di tipo

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

e dividiamo la (II.34) e la (II.37) da $X(x)T(t)$. Otteniamo

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, & \text{equazione del calore,} \\ \frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}, & \text{equazione delle onde,} \end{cases}$$

²Infatti $a^2 = K/(\mu\rho)$, dove K è la conduttività termica, μ è il calore specifico e ρ è la densità del mezzo. In generale vale l'equazione $\mu\rho(\partial u/\partial t) = K\Delta u + \nabla \vec{K} \cdot \nabla u$.

con le condizioni di Dirichlet

$$X(0) = X(L) = 0.$$

La separazione delle variabili conduce al problema di contorno

$$\begin{cases} X''(x) + k^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(L) = 0, \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

più il problema in variabile temporale

$$\begin{cases} T'(t) = -a^2 k^2 T(t), & \text{equazione del calore,} \\ T''(t) = k^2 c^2 T(t), & \text{equazione delle onde.} \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

Quindi la soluzione della (II.41) ha la forma

$$(k^2)_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X(x) \sim \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{II.43})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$, mentre la soluzione dei problemi temporali ha la forma

$$\begin{cases} T(t) = T(0) \exp\left(-a^2 t \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right), & \text{equazione del calore,} \\ T(t) = T(0) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + T'(0) \frac{\sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)}{n\pi c/L}, & \text{equazione delle onde.} \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

La soluzione generale della equazione del calore o delle onde è una combinazione lineare (facendo scorrere $n = 1, 2, 3, \dots$) delle soluzioni elementari $X_n(x)T_n(t)$. Quindi la soluzione generale dell'equazione del calore ha la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-a^2 t \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{II.45})$$

dove

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (\text{II.46})$$

Il coefficiente di Fourier c_n viene calcolato nel seguente modo:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

D'altra parte, la soluzione generale dell'equazione delle onde ha la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + d_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)}{n\pi c/L} \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{II.47})$$

dove

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{II.48})$$

$$u_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (\text{II.49})$$

I coefficienti di Fourier si calcolano nel seguente modo:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

$$d_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Se invece della (II.39) vengono imposte le condizioni di Neumann, i dettagli della derivazione della soluzione non cambiano molto.

4.2 Equazioni delle onde e del calore sul rettangolo

La risoluzione delle equazioni del calore e delle onde sul rettangolo è analoga a quella per i corrispondenti problemi unidimensionali. Al posto degli autovalori e autofunzioni dell'equazione di Helmholtz sull'intervallo si utilizzano ora quelli dell'equazione di Helmholtz sul rettangolo.

Consideriamo ora l'equazione del calore per $(x, y) \in (0, L_1) \times (0, L_2)$ con condizione iniziale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (\text{II.50})$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (\text{II.51})$$

dove a^2 è la diffusività termica, e quella delle onde con condizioni iniziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (\text{II.52})$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (\text{II.53})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y), \quad (\text{II.54})$$

dove $c > 0$ è la velocità d'onda. In ambedue casi imponremo una condizioni al contorno, quali quella di Dirichlet

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u(L_1, y, t) = 0, & y \in [0, L_2], \\ u(x, 0, t) = u(x, L_2, t) = 0, & x \in [0, L_1]. \end{cases} \quad (\text{II.55})$$

La separazione delle variabili

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

e la divisione dall'espressione $X(x)Y(y)T(t)$ conducono al problema al contorno

$$\begin{cases} \frac{T'(t)}{T(t)} = a^2 \left[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right], \\ X(0) = X(L_1) = 0, \\ Y(0) = Y(L_2) = 0, \end{cases} \quad (\text{II.56})$$

per l'equazione del calore e al problema al contorno

$$\begin{cases} \frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \left[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right], \\ X(0) = X(L_1) = 0, \\ Y(0) = Y(L_2) = 0, \end{cases} \quad (\text{II.57})$$

per l'equazione delle onde. Otteniamo, come al solito,

$$\begin{aligned} X''(x) + k_x^2 X(x) &= 0, & X(0) &= X(L_1) = 0, \\ Y''(y) + k_y^2 Y(y) &= 0, & Y(0) &= Y(L_2) = 0, \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} (k_x)^2 &= \left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2, & X(x) &\sim \sin \frac{n\pi x}{L_1}, \\ (k_y)^2 &= \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2, & Y(y) &\sim \sin \frac{m\pi y}{L_2}, \end{aligned}$$

dove $n, m = 1, 2, 3, \dots$. Inoltre,

$$T(t) = T(0) \exp \left(-a^2 t \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right] t \right)$$

per l'equazione del calore e

$$T(t) = T(0) \cos \left(ct \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \\ + T'(0) \frac{\sin \left(ct \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)}{c \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

per l'equazione delle onde.

Per l'equazione del calore arriviamo alla seguente soluzione completa:

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} \exp \left(-a^2 t \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right] t \right) \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2}, \quad (\text{II.58})$$

dove

$$u_0(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} \quad (\text{II.59})$$

e

$$c_{n,m} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} u_0(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} dy dx. \quad (\text{II.60})$$

Infine l'equazione delle onde ha la seguente soluzione:

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[c_{n,m} \cos \left(ct \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} \right. \\ \left. + d_{n,m} \frac{\sin \left(ct \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)}{c \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2}} \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} \right], \quad (\text{II.61})$$

dove

$$u_0(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2}, \quad (\text{II.62})$$

$$u_1(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} d_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2}, \quad (\text{II.63})$$

e

$$c_{n,m} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} u_0(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} dy dx, \quad (\text{II.64})$$

$$d_{n,m} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} u_1(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} dy dx. \quad (\text{II.65})$$

4.3 Alcune applicazioni semplici

a. Equazione delle Onde sull'Intervallo con Forza Esterna. Consideriamo ora il problema (con $c = 1$)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

Sostituendo

$$u(x, t) = v(x, t) + \psi(x),$$

otteniamo l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \psi''(x) + F(x).$$

Scegliendo la ψ tale che

$$\begin{cases} \psi''(x) = -F(x), \\ \psi(0) = \psi(L) = 0, \end{cases}$$

facciamo la separazione delle variabili

$$v(x, t) = X(x)T(t)$$

per arrivare al problema

$$\begin{cases} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases} \quad (\text{II.67})$$

Dopo alcuni calcoli si trova il seguente risultato finale

$$u(x, t) = \psi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{II.68})$$

dove

$$\psi(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (\text{II.69})$$

I coefficienti di Fourier si calcolano nel seguente modo:

$$c_n = -\frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

b. Diffusion di Cariche in un Transistore. La concentrazione delle cariche positive in un transistore soddisfa alle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\eta}{L} \frac{\partial h}{\partial x} \right), \\ h(0, t) = h(L, t) = 0, \\ h(x, 0) = \frac{KL}{a^2 \eta} [1 - e^{-\eta(1-\frac{x}{L})}]. \end{cases} \quad (\text{II.70})$$

La sostituzione

$$h(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} u(x, t), \quad \alpha = \frac{\eta}{2L}, \quad \beta = -\frac{a^2 \eta^2}{4L^2},$$

convertono la (II.70) nel seguente problema per l'equazione del calore:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = \frac{KL}{a^2 \eta} e^{-\eta x/2L} [1 - e^{-\eta(1-\frac{x}{L})}]. \end{cases} \quad (\text{II.71})$$

c. Equazione del Telegrafo. Consideriamo ora l'equazione

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A \frac{\partial u}{\partial t} + Bu = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \end{cases} \quad (\text{II.72})$$

dove A e B sono costanti positive e $A^2L^2 < 4(BL^2 + a^2\pi^2)$. La separazione delle variabili

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

conduce alle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{T''(t) + AT'(t) + BT(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)}, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases} \quad (\text{II.73})$$

Dunque

$$X(x) \sim \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

mentre l'equazione temporale ha la forma

$$T''(t) + AT'(t) + \left[B + \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2\right] T(t) = 0. \quad (\text{II.74})$$

Grazie alla condizione $A^2L^2 < 4(BL^2 + a^2\pi^2)$, tutti gli zeri dell'equazione caratteristica della (II.74) sono complessi coniugati. Infatti, gli zeri sono

$$-\frac{A}{2} \pm i\omega_n \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{A}{2} \pm i\sqrt{\left[B + \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2\right] - \left(\frac{A}{2}\right)^2}.$$

Dunque

$$T(t) = T(0)e^{-\frac{At}{2}} \left[\cos(\omega_n t) + \frac{A}{2} \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \right] + T'(0)e^{-\frac{At}{2}} \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}.$$

Quindi la soluzione completa ha la seguente forma:

$$\begin{aligned} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{-\frac{At}{2}} \left[\cos(\omega_n t) + \frac{A}{2} \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right. \\ \left. + d_n e^{-\frac{At}{2}} \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

dove

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{II.76})$$

$$u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{II.77})$$

e i coefficienti di Fourier

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (\text{II.78})$$

$$d_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (\text{II.79})$$

Capitolo III

FUNZIONI SPECIALI

1 Metodo di Frobenius

L'equazione differenziale ordinaria

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad (\text{III.1})$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono funzioni analitiche in un intorno di $x = 0$ e quindi ammettono uno sviluppo in potenze di x con raggio di convergenza strettamente positiva, può essere risolta sostituendo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Risulta una relazione di ricorrenza per i coefficienti c_n che ci consente a calcolare c_2, c_3, c_4, \dots in modo unico dai coefficienti iniziali $c_0 = y(0)$ e $c_1 = y'(0)$. Inoltre, il raggio di convergenza della serie di potenze per la $y(x)$ non è inferiore al minimo dei raggi di convergenze delle serie di potenze per $P(x)$ e $Q(x)$. Siccome $y(0)$ e $y'(0)$ determinano completamente la soluzione y , si trovano in tal modo tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (III.1).

Esempio III.1 Il metodo di risoluzione sostituendo $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ viene illustrato dall'*equazione di Airy*

$$y'' = xy.$$

Siccome $y''(0) = 0$, abbiamo $c_2 = 0$. Quindi $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)c_{n+3} x^{n+1}$ e $xy = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$ implicano

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)c_{n+3} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1},$$

e quindi si arriva alla relazione di ricorrenza

$$(n+2)(n+3)c_{n+3} = c_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

partendo da $c_0 = y(0)$, $c_1 = y'(0)$ e $c_2 = 0$. Quindi

$$c_{3k} = \frac{c_0}{2.3.5.6.8.9. \dots (3k-1)(3k)}, \quad c_{3k+1} = \frac{c_1}{3.4.6.7.9.10. \dots (3k)(3k+1)},$$

e $c_2 = c_5 = c_8 = \dots = 0$. Di conseguenza

$$y(x) = y(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2.3.5.6. \dots (3k-1)(3k)} + y'(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3.4.6.7. \dots (3k)(3k+1)},$$

dove ambedue le serie hanno raggio di convergenza $+\infty$.

Il **metodo di Frobenius** (1877) è stato sviluppato per risolvere certe equazioni differenziali ordinarie con coefficienti singolari utilizzando lo sviluppo della soluzione in serie di potenza. In tal caso l'equazione differenziale ha la forma (III.1), dove $p(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(x)/x$ e $q(x) \stackrel{\text{def}}{=} Q(x)/x^2$ sono funzioni analitiche in un intorno di $x = 0$. Si dice che $x = 0$ è una *singularità regolare* [inglese: regular singularity] dell'equazione.

Consideriamo prima l'esempio più elementare di un'equazione differenziale con singolarità regolare ad $x = 0$, la cosiddetta *equazione di Eulero*

$$x^2 y'' + pxy' + qy = 0, \quad (\text{III.2})$$

dove p e q sono coefficienti costanti. Per $(\pm x) > 0$ sostituiamo $x = \pm e^t$, dove $t \in \mathbb{R}$, e arriviamo all'equazione a coefficienti costanti

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (p-1) \frac{dy}{dt} + qy = 0. \quad (\text{III.3})$$

La sua equazione caratteristica, detta *equazione indiciale*, è

$$\alpha(\alpha-1) + p\alpha + q = 0. \quad (\text{III.4})$$

Ci sono tre possibilità:

- a. Discriminante $= (p-1)^2 - 4q > 0$. L'equazione indiciale (III.4) ha due radici reali diverse α_1 e α_2 . In tal caso la soluzione della (III.2) è

$$y(x) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} = c_1 |x|^{\alpha_1} + c_2 |x|^{\alpha_2}.$$

- b. Discriminante $= (p-1)^2 - 4q = 0$. L'equazione indiciale (III.4) ha una singola radice reale α doppia. In tal caso la soluzione della (III.2) è

$$y(x) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t} = c_1 |x|^{\alpha} + c_2 |x|^{\alpha} \ln |x|.$$

c. Discriminante = $(p - 1)^2 - 4q < 0$. L'equazione indiciale (III.4) ha due radici complesse coniugate $\sigma \pm i\tau$ dove σ e τ sono reali. In tal caso la soluzione della (III.2) è

$$y(x) = e^{\sigma t} [c_1 \cos(\tau t) + c_2 \sin(\tau t)] = |x|^\sigma [c_1 \cos(\tau \ln |x|) + c_2 \sin(\tau \ln |x|)].$$

Spieghiamo ora il *Metodo di Frobenius* (1877). Si cerchi la generalizzazione della risoluzione dell'equazione di Eulero alle equazione differenziali

$$x^2 y''(x) + xp(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \quad (\text{III.5})$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni analitiche in un intorno di $x = 0$ nel piano complesso. Ciò vuol dire che

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad (\text{III.6})$$

dove ambedue serie di potenze hanno un raggio di convergenza strettamente positiva. Sostituiamo ora nella (III.5)

$$y(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha}, \quad (\text{III.7})$$

dove, per ipotesi, la serie ha un raggio di convergenza $R > 0$.¹ Allora

$$xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha) c_n x^{n+\alpha}, \quad x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha)(n + \alpha - 1) c_n x^{n+\alpha}, \quad (\text{III.8})$$

dove abbiamo calcolato le derivate termine a termine. Sostituendo la (III.7) e la (III.8) nella (III.5) otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n + \alpha)(n + \alpha - 1) c_n + \sum_{j=0}^n p_{n-j} (j + \alpha) c_j + \sum_{j=0}^n q_{n-j} c_j \right] x^{n+\alpha} = 0.$$

Quindi tutti i coefficienti di questa serie si devono annullare:

$$(n + \alpha)(n + \alpha - 1) c_n + \sum_{j=0}^n p_{n-j} (j + \alpha) c_j + \sum_{j=0}^n q_{n-j} c_j = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.9})$$

In particolare, abbiamo trovate la cosiddetta *equazione indiciale*

$$\Lambda(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(\alpha - 1) + p_0 \alpha + q_0 = 0. \quad (\text{III.10})$$

Affinchè $c_0 \neq 0$, α deve essere una radice della (III.9).

¹Si può dimostrare che il raggio di convergenza di questa serie di potenze non è inferiore al minimo dei raggi di convergenza delle serie di potenze nella (III.6).

Teorema III.2 *Supponiamo che l'equazione indiciale (III.9) ha due zeri diversi con una differenza non intera. Allora, scegliendo per α uno degli zeri, si ottengono due soluzioni linearmente indipendenti della (III.5) per $|x|$ inferiore al minimo dei raggi di convergenza delle serie di potenza (III.6).*

Se l'equazione indiciale ha un singolo zero $\alpha \in \mathbb{R}$, allora la (III.7) conduce ad una singola soluzione linearmente indipendente della (III.5). Per trovare una seconda soluzione linearmente indipendente, si calcolino i coefficienti $c_n(\alpha)$ dal coefficiente c_0 utilizzando la (III.9) e inserendo α come fosse un parametro libero. La seconda soluzione linearmente indipendente ora ha la seguente forma:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha) x^{n+\alpha} \right]_{\alpha=\alpha_0}, \quad (\text{III.11})$$

dove α_0 è il singolo zeri dell'equazione indiciale.

Se l'equazione indiciale ha due zeri reali con differenza intera, α_0 e $\alpha_0 - N$ per un opportuno $N \in \mathbb{N}$, allora la situazione è abbastanza complicata, poichè in alcuni casi si trovano due soluzioni linearmente indipendenti e negli altri casi due soluzioni proporzionali. Scriviamo ora la (III.9) nella seguente forma

$$\begin{cases} \Lambda(\alpha)c_0 = 0, \\ \Lambda(\alpha + n)c_n + \sum_{j=0}^{n-1} [p_{n-j}(j + \alpha) + q_{n-j}]c_j = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

Sostituendo $\alpha = \alpha_0$, essendo α_0 lo zero maggiore, si vede subito che si possono trovare tutti i coefficienti c_n dal coefficiente c_0 in modo unico. D'altra parte, sostituendo $\alpha = \alpha_0 - N$, essendo $\alpha_0 - N$ lo zero minore, si vede subito che si possono calcolare in modo unico i coefficienti $c_1, \dots, c_2, \dots, c_{N-1}$ dal coefficiente c_0 . Purtroppo, siccome $\Lambda((\alpha_0 - N) + N) = 0$, per $n = N$ e $\alpha = \alpha_0 - N$ la (III.12) si reduce all'equazione

$$\sum_{j=0}^{N-1} [p_{N-j}(j + \alpha_0 - N) + q_{N-j}]c_j = 0, \quad (\text{III.13})$$

dove c_1, \dots, c_{N-1} seguono in modo unico dal coefficiente c_0 . In altre parole: $c_s = c_s(\text{se } c_0 = 1)c_0$ per $s = 1, \dots, N - 1$. Ci sono ora due possibilità.

Prima: Se

$$\sum_{j=0}^{N-1} [p_{N-j}(j + \alpha_0 - N) + q_{N-j}]c_j(\text{se } c_0 = 1) \neq 0,$$

allora dobbiamo per forza scegliere $c_0 = 0$. In tal caso $c_0 = c_1 = \dots = c_{N-1} = 0$. Scegliamo ora un coefficiente c_N . Allora la (III.9) per $n \geq N + 1$

e $\alpha = \alpha_0 - N$ ci contengono a calcolare c_{N+1}, c_{N+2}, \dots da c_N in modo unico. Ponendo $d_n = c_{N+n}$ per $n = 0, 1, 2, \dots$ e $n = N + m$ per $m = 0, 1, 2, \dots$, la (III.9) ha la forma

$$(m + \alpha_0)(m + \alpha_0 - 1)d_m + \sum_{l=0}^m p_{m-l}(l + \alpha_0)d_l + \sum_{l=0}^m q_{m-l}d_l = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{III.14})$$

e quindi per $\alpha = \alpha_0 - N$ si otterrà una soluzione proporzionale a quella ottenuta per $\alpha = \alpha_0$.

Seconda: Se

$$\sum_{j=0}^{N-1} [p_{N-j}(j + \alpha_0 - N) + q_{N-j}] c_j (\text{se } c_0 = 1) = 0,$$

allora l'equazione per c_N è infatti la tautologia $0 = 0$, mentre per $n \geq N + 1$ e $\alpha = \alpha_0 - N$ la (III.9) conduce a valori per i coefficienti c_{N+1}, c_{N+2}, \dots che dipendono in modo unico e lineare dai coefficienti c_0 e c_N . Quindi si otterranno due soluzioni linearmente indipendenti.

Esempio III.3 Consideriamo l'equazione di Bessel

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0$$

di ordine $\nu \geq 0$, dove $p(x) \equiv 1$ e $q(x) = x^2 - \nu^2$. Quindi $p_0 = 1$, $q_0 = -\nu^2$ e $q_2 = 1$, e l'equazione indiciale

$$\Lambda(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) + p_0\alpha + q_0 = \alpha^2 - \nu^2 = 0$$

ha gli zeri $\pm\nu$. Di conseguenza, se 2ν non è un intero, il metodo di Frobenius conduce a due soluzioni linearmente indipendenti. Supponiamo ora che $0 \neq 2\nu \in \mathbb{Z}$. Allora la (III.12) implica

$$\begin{cases} \Lambda(-\nu + 1)c_1 = 0, \\ \Lambda(-\nu + n)c_n + c_{n-2} = 0, \quad n = 2, \dots, \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

dove $0 \notin \{\Lambda(-\nu + n) : n = 1, 2, \dots, 2\nu - 1\} \cup \{\Lambda(-\nu + n) : n \geq 2\nu + 1\}$. È facile capire che per 2ν dispari si trovano due soluzioni linearmente indipendenti, mentre per 2ν pari si trova una singola soluzione linearmente indipendente. Infatti, se 2ν è pari, per $n = 2\nu$ si trova $c_{2\nu-2} = 0$; utilizzando la (III.15) per $n = 2, 4, \dots, 2\nu - 2$ pari, otteniamo $0 = c_{2\nu-2} = c_{2\nu-4} = \dots = c_2 = c_0$, mentre la (III.15) per $n = 1, 3, \dots, 2\nu - 1$ conduce a $0 = c_1 = c_3 = \dots = c_{2\nu-1} = 0$. Per 2ν dispari, lo stesso ragionamento conduce a $c_1 = c_3 = \dots, c_{2\nu} = \dots = 0$ direttamente.

Esempio III.4 Consideriamo ora l'equazione differenziale di Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0,$$

dove $x = \pm 1$ sono singolarità regolari. Limitandoci al caso $x = 1$ e utilizzando $-2x/(1 - x^2) = (2x/(x + 1))/(x - 1)$ e $n(n + 1) = [n(n + 1)(x - 1)]/(x - 1)^2$, abbiamo $p_0 = 1$, $p_j = (-1)^{j-1}/2^j$ ($j = 1, 2, 3, \dots$), $q_0 = 0$ e $q_j = n(n + 1)(-1)^{j-1}/2^{j+1}$ per $j \geq 1$. Dunque l'equazione indiciale è $\Lambda(\alpha) = 0$, dove

$$\Lambda(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) + \alpha = \alpha^2.$$

Quindi gli zeri sono ambedue uguali a zero. Risulta dunque una singola soluzione linearmente indipendente.

2 Funzioni di Bessel

Consideriamo l'equazione differenziale

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - \nu^2)u = 0, \quad (\text{III.16})$$

detta *equazione di Bessel*. Ogni soluzione di quest'equazione non identicamente nulla è detta *funzione cilindrica*. Osserviamo che i coefficienti dell'equazione (III.16) non soddisfano le condizioni del paragrafo precedente.

2.1 Definizione e proprietà semplici

Consideriamo, per $\nu \in \mathbb{R}$, la funzione²

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \nu}, \quad (\text{III.17})$$

dove $\Gamma(z)$ è la funzione Gamma che soddisfa $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ e $\Gamma(1) = 1$ [vedi l'Appendice A]. Si può rappresentare nella forma

$$J_\nu(x^2) = x^\nu f_\nu(x^2), \quad (\text{III.18})$$

dove $f_\nu(\zeta)$ è una funzione analitica su tutto il piano complesso,

$$f_\nu(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta^k}{2^{2k + \nu} \Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)}, \quad (\text{III.19})$$

²La (III.17) si può anche derivare applicando il metodo di Frobenius.

con raggio di convergenza $R = +\infty$. Quindi la sua somma definisce una funzione analitica $f_\nu(\zeta)$ su tutto il piano complesso.

Verifichiamo che la funzione $J_\nu(x)$ soddisfa l'equazione (III.16). Utilizzando la relazione $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
& x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) - \nu^2 J_\nu(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [(2k+\nu)(2k+\nu-1) + (2k+\nu) - \nu^2]}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\
&= -x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -x^2 J_\nu(x),
\end{aligned}$$

come dovevasi dimostrare. La funzione cilindrica $J_\nu(x)$ si dice *funzione di Bessel di ordine ν* , dove $x^\nu > 0$ per $x > 0$. In particolare

$$\begin{cases} J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \\ J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

Se $\nu > 0$ non è intero, le funzioni $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti. Ciò segue dalla (III.17) in virtù del fatto che

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} [1 + O(x^2)], \quad x \rightarrow 0; \quad \nu \neq -1, -2, -3, \dots, \quad (\text{III.21})$$

poichè $\Gamma(\nu+1)$ è finito. Se, invece, $\nu = n$ è intero, si ha

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad (\text{III.22})$$

e, quindi, le funzioni $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ sono linearmente dipendenti. L'uguaglianza (III.22) segue dal fatto che $\Gamma(-k)$ è infinito per $k = 0, 1, 2, \dots$ [vedi l'Appendice A] e quindi la sommatoria nella serie (III.17) per $J_{-n}(x)$ inizia a $k = n$.

Sono valide le seguenti relazioni di ricorrenza:

$$J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \quad (\text{III.23})$$

Infatti, la prima formula (III.23) segue dalla (III.17):

$$\begin{aligned} & J'_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k(2k+\nu)}{2\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} - \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} \right] \\ &= -\frac{\nu}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x). \end{aligned}$$

In modo analogo si stabilisce la seconda formula (III.23).

Le formule (III.23) si possono riscrivere nella forma

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).$$

In particolare per $\nu = 0$ si trova

$$J'_0(x) = -J_1(x).$$

Infine, sottraendo le formule (III.23), si ottiene ancora una relazione di ricorrenza:

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = 0.$$

2.2 Funzioni di Bessel di seconda specie

Il Wronskiano $W[u, v] = uv' - u'v$ di due soluzioni u e v dell'equazione di Bessel soddisfa all'equazione differenziale di primo ordine

$$W'[u, v](x) + \frac{1}{x} W[u, v](x) = 0,$$

e quindi $W[u, v](x)$ è proporzionale alla funzione $1/x$. Per trovare la costante di proporzionalità basta studiare l'andamento del Wronskiano se $x \rightarrow 0$. Per $\nu \notin \mathbb{Z}$ si vede subito che

$$\begin{cases} J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \\ xJ'_\nu(x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{-\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} + O(x^{-\nu+2}), \\ xJ'_{-\nu}(x) = \frac{-\nu}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} + O(x^{-\nu+2}), \end{cases}$$

e dunque [vedi l'Appendice A]

$$\begin{aligned} W[J_\nu, J_{-\nu}](x) &= \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} + O(x) \\ &= \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} = \frac{-2 \sin(\nu\pi)}{\pi x}. \end{aligned}$$

Quindi $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti [cioè, il Wronskiano non si annulla per $x \neq 0$] se e solo se ν non è un intero. Se $\nu \in \mathbb{Z}$, risulta $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$.

Per $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ci dovrebbe esistere una soluzione dell'equazione di Bessel linearmente indipendente della $J_n(x)$. Per trovare una soluzione linearmente indipendente da $J_\nu(x)$ per $\nu \in \mathbb{Z}$, definiamo la *funzione di Bessel di seconda specie*

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

per $\nu \notin \mathbb{Z}$. Siccome sia il numeratore che il denominatore sono funzioni analitiche di $\nu \in \mathbb{C}$ e $(d/d\nu) \sin(\nu\pi) = \pi \cos(\nu\pi) \neq 0$ per $\nu = 0, 1, 2, \dots$, il limite di $Y_\nu(x)$ per $\nu \rightarrow n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esiste ed è uguale all'espressione

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - \frac{(-1)^n}{\pi} \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}.$$

Calcolando la derivata della serie di potenza per $J_\nu(x)$ rispetto a ν ed introducendo la funzione $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ otteniamo per $x \geq 0$

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(k!)^2} \left[\log \frac{z}{2} - \psi(k+1) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} J_0(x) \log \frac{x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(k!)^2} \psi(k+1), \\ Y_n(x) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-n} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left[2 \log \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+n+1) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \log \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)]. \end{aligned}$$

Quest'espressione conduce alle rappresentazioni asintotiche per $x \rightarrow 0^+$

$$Y_n(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \log \frac{x}{2}, & n = 0 \\ -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}, & n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

implicando che $|Y_n(x)| \rightarrow +\infty$ se $x \rightarrow 0$.

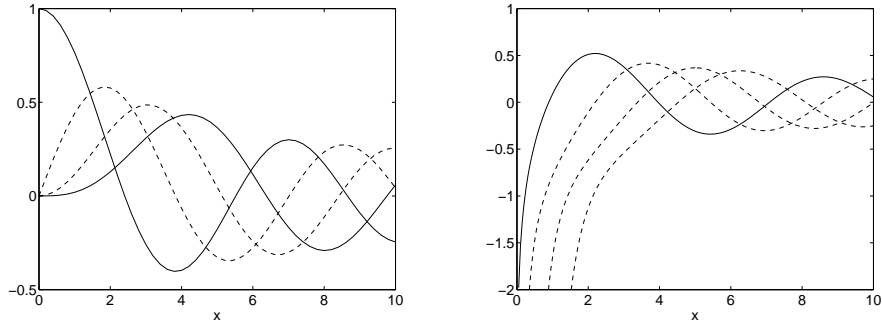


Figura III.1: Pannello sinistro: le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3$.
Pannello destro: le funzioni di Neumann $Y_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Per ragioni di linearità le funzioni di Bessel di seconda specie soddisfano alle stesse formule di ricorrenza delle funzioni di Bessel di prima specie. In particolare

$$\begin{aligned} Y'_\nu(x) &= Y_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} Y_\nu(x) = -Y_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} Y_\nu(x); \\ \frac{d}{dx} [x^\nu Y_\nu(x)] &= x^\nu Y_{\nu-1}(x), & \frac{d}{dx} [x^{-\nu} Y_\nu(x)] &= -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x); \\ Y'_0(x) &= -Y_1(x); \\ Y_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) + Y_{\nu-1}(x) &= 0. \end{aligned}$$

2.3 Ortogonalità e zeri

Proposizione III.5 Per $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta > 0$, siano μ_1 e μ_2 zeri reali dell'equazione

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0, \quad (\text{III.25})$$

dove $\nu > -1$. Allora

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & \mu_1^2 \neq \mu_2^2, \\ \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu(\mu_1)^2, & \mu_1 = \mu_2, \\ -\frac{1}{2} J'_\nu(\mu_1) J'_\nu(-\mu_1) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu(\mu_1) J_\nu(-\mu_1), & \mu_1 = -\mu_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

Dimostrazione. Siano $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. In virtù della (III.16), le funzioni $J_\nu(\mu_1 x)$ e $J_\nu(\mu_2 x)$ soddisfano le equazioni

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} \right] + \left(\mu_1^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\mu_1 x) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx} \right] + \left(\mu_2^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\mu_2 x) &= 0. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo la prima di queste equazioni per $J_\nu(\mu_2 x)$ e la seconda per $J_\nu(\mu_1 x)$, poi sottraiamo termine a termine la prima dalla seconda ed integriamo da 0 a 1. Si ottiene

$$\begin{aligned} & x [\mu_1 J_\nu(\mu_2 x) J'_\nu(\mu_1 x) - \mu_2 J_\nu(\mu_1 x) J'_\nu(\mu_2 x)]_{x=0}^1 \\ &= (\mu_2^2 - \mu_1^2) \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx. \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

Dalla (III.17) [vedi anche la (III.21)] abbiamo per $x \rightarrow 0^+$

$$J_\nu(\mu x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\mu x}{2} \right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \quad \mu x J'_\nu(\mu x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\mu x}{2} \right)^\nu + O(x^{\nu+2}),$$

e perciò

$$\mu_1 x J_\nu(\mu_2 x) J'_\nu(\mu_1 x) - \mu_2 x J_\nu(\mu_1 x) J'_\nu(\mu_2 x) = O(x^{2\nu+2}), \quad x \rightarrow 0^+.$$

Quindi, grazie alla condizione $\nu > -1$, il primo membro della (III.27) si annulla per $x = 0$ e si ottiene

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx = \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)}{\mu_2^2 - \mu_1^2}. \quad (\text{III.28})$$

Se μ_1 e μ_2 sono zeri reali dell'equazione (III.25) dove $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta > 0$, il determinante del sistema lineare

$$\alpha J_\nu(\mu_1) + \beta \mu_1 J'_\nu(\mu_1) = 0, \quad \alpha J_\nu(\mu_2) + \beta \mu_2 J'_\nu(\mu_2) = 0,$$

per (α, β) si annulla, cioè il numeratore della frazione nella (III.28) si annulla. Di conseguenza, se $\mu_1^2 \neq \mu_2^2$, segue la proprietà di ortogonalità (cioè, si annulla la parte a sinistra della (III.28)).

Per dimostrare la (III.26) se $\mu_1 = \mu_2$, si passi al limite per $\mu_2 \rightarrow \mu_1$ nella (III.28) utilizzando la regola di De L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x)^2 dx &= \lim_{\mu_2 \rightarrow \mu_1} \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)}{\mu_2^2 - \mu_1^2} \\ &= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 - \frac{1}{2\mu_1} J_\nu(\mu_1) [J'_\nu(\mu_1) + \mu_1 J''_\nu(\mu_1)] \\ &= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} J_\nu(\mu_1)^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right). \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato la (III.26) per $\mu_1 = \mu_2$. La dimostrazione per $\mu_1 = -\mu_2$ è analoga. \square

Dimostriamo ora le seguenti proprietà degli zeri dell'equazione (III.25) per $\nu > -1$. Per $\beta = 0$ quest'equazione definisce gli zeri delle funzioni di Bessel.

Teorema III.6 *Gli zeri dell'equazione (III.25) per $\nu > -1$ sono reali, semplici, ad eccezione, forse, dello 0; questi zeri sono simmetricamente disposte rispetto all'origine e non hanno punti di accumulazione.*

Dimostrazione. Dalla (III.17), in virtù del fatto che α, β e $\Gamma(\xi)$ sono reali, per ξ reali, si ottiene $J_\nu(x) = \overline{J_\nu(\bar{x})}$. Quindi

$$\overline{\alpha J_\nu(\bar{\mu}) + \beta \bar{\mu} J'_\nu(\bar{\mu})} = \alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu).$$

Per questa ragione, se μ è uno zero dell'equazione (III.25), $\bar{\mu}$ è anche esso uno suo zero. Se $\mu^2 \neq \bar{\mu}^2$, applicando la formula (III.26) per $\mu_1 = \mu$ e $\mu_2 = \bar{\mu}$, si arriva ad una contraddizione:

$$0 = \int_0^1 x J_\nu(\mu x) J_\nu(\bar{\mu} x) dx = \int_0^1 x |J_\nu(\mu x)|^2 dx.$$

Ciò significa che $\mu^2 = \bar{\mu}^2$, cioè μ è un numero reale o immaginario. Ma l'ultimo caso non ha luogo, poichè, in virtù della (III.17) e del fatto che $\Gamma(\xi) > 0$ per $\xi > 0$, si ha per $0 \neq a \in \mathbb{R}$

$$\alpha J_\nu(ia) + i\beta a J'_\nu(ia) = \left(\frac{ia}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha + \beta(2k + \nu)}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \neq 0.$$

Siccome $\mu^{-\nu} [\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu)]$ è una funzione analitica di μ in tutto il piano complesso, i suoi zeri non si possono accumulare ad un punto finito.

Dimostriamo la semplicità degli zeri. Sia $\mu_0 > 0$ uno zero della (III.25) di molteplicità 2, in modo che

$$\begin{cases} \alpha J_\nu(\mu_0) + \beta \mu_0 J'_\nu(\mu_0) = 0, \\ \alpha J'_\nu(\mu_0) + \beta J''_\nu(\mu_0) + \beta \mu_0 J''_\nu(\mu_0) = -\beta \left(\mu_0 - \frac{\nu^2}{\mu_0} \right) J_\nu(\mu_0) + \alpha J'_\nu(\mu_0) = 0, \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

in virtù dell'equazione (III.16). Dalla (III.29) [che è un sistema di equazioni lineari per $J_\nu(\mu_0)$ e $J'_\nu(\mu_0)$] concludiamo che a) $J_\nu(\mu_0) = J'_\nu(\mu_0) = 0$, oppure b) $\alpha^2 + \beta^2(\mu_0^2 - \nu^2) = 0$. Il caso a) è impossibile grazie al teorema sull'unicità della soluzione della (III.16), poichè $\mu_0 > 0$ non è un punto singolare dell'equazione (III.16). Dimostriamo che è anche impossibile il caso b). Per realizzare il caso b) ci vuole $\beta > 0$ e $(\alpha/\beta) = \sqrt{\nu^2 - \mu_0^2}$, dove $0 < \mu_0 \leq |\nu|$. Sostituendo quest'equazione nella (III.29) si ottiene

$$[J'_\nu(\mu_0)]^2 = \left(\frac{\nu^2}{\mu_0^2} - 1 \right) J_\nu(\mu_0)^2,$$

il che, in virtù della (III.26), porta all'uguaglianza contraddittoria

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_0 x)^2 dx = \frac{1}{2} \left\{ [J'_\nu(\mu_0)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_0^2} \right) J_\nu(\mu_0)^2 \right\} = 0.$$

Il teorema è stato dimostrato. □

In base al teorema dimostrato si possono numerare gli zeri dell'equazione (III.25), disponendole in ordine crescente:

$$0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \mu_3^{(\nu)} < \dots$$

Se $\nu > 0$, $J_\nu(x)$ si annulla per $x = 0$.

Senza dimostrazione poniamo l'espressione asintotica per la funzione $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-3/2}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (\text{III.30})$$

Ne segue la formula approssimativa per gli zeri di $J_\nu(x)$:

$$\mu_k^{(\nu)} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \nu + k\pi, \quad k \rightarrow +\infty.$$

2.4 Altre funzioni cilindriche

Insieme con le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, sono importanti per le applicazioni altri tipi di funzioni cilindriche. Queste funzioni sono le seguenti:

1. *Le funzioni di Neumann o le funzioni di Bessel di seconda specie*

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, & \nu \notin \mathbb{Z} \\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}, & \nu = n = 0, 1, 2, \dots \\ (-1)^n Y_n(-x), & \nu = -n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Spesso si vede la notazione $N_\nu(x)$ invece di $Y_\nu(x)$.

2. *Le funzioni di Hankel di prima specie*

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i Y_\nu(x)$$

e le funzioni di Hankel di seconda specie

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i Y_\nu(x).$$

3. *Le funzioni di Bessel di argomento immaginario*

$$I_\nu(x) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\pi\nu i/2} H_\nu^{(1)}(ix).$$

Le funzioni $I_\nu(x)$ si chiamano funzioni di Bessel modificate di prima specie (modified Bessel functions of the first kind), mentre le funzioni $K_\nu(x)$ si chiamano funzioni di MacDonald.³

Utilizzando l'espressione asintotica (III.30) per $J_\nu(x)$, si ottiene per $x \rightarrow +\infty$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \quad (\text{III.31})$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \quad (\text{III.32})$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad (\text{III.33})$$

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} [1 + O(x^{-1})], \quad (\text{III.34})$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} [1 + O(x^{-1})]. \quad (\text{III.35})$$

³La nomenclatura non è uniforme. Nella letteratura ci sono diversi nomi e notazioni per queste funzioni.

Analogamente, utilizzando la (III.21), si ottiene per $x \rightarrow 0^+$

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(x) \approx -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x}, & H_0^{(2)}(x) \approx \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x}, \\ Y_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{x}, & K_0(x) \approx \ln \frac{1}{x}. \end{cases}$$

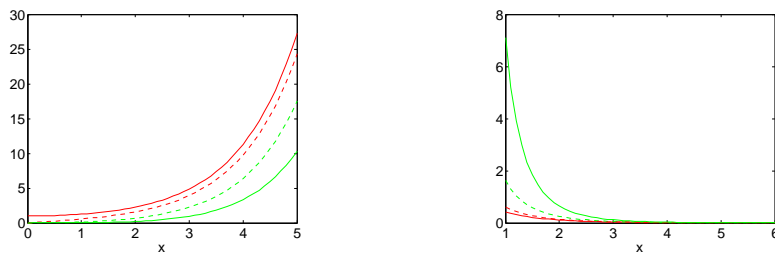


Figura III.2: Pannello sinistro: le funzioni di Bessel immaginarie $I_\nu(x)$ per $\nu = 0, 1, 2, 3$. Pannello destro: le funzioni di MacDonald $K_\nu(x)$ per $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Troviamo ora le equazioni differenziali per le funzioni $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$. Sostituendo $x \mapsto ix$ nella (III.16), otteniamo l'equazione differenziale

$$x^2 u'' + x u' - (x^2 + \nu^2) u = 0. \quad (\text{III.36})$$

Dal Teorema III.6 segue che per $\nu > -1$ le funzioni di Bessel immaginarie $I_\nu(x)$ e le loro derivate prime non hanno zeri reali (con l'eccezione di $x = 0$ se $\nu > 0$).

2.5 Funzioni sferiche di Bessel

Le funzioni di Bessel $J_{\pm(l+\frac{1}{2})}(x)$, dove $l = 0, 1, 2, \dots$, appaiono nello studio dello scattering quantistico e dello scattering della luce. Per questo motivo vengono

introdotte le seguenti funzioni:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+\frac{1}{2}}(z), \quad (\text{III.37})$$

$$y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{l+\frac{1}{2}}(z), \quad (\text{III.38})$$

$$h_l^{(1)}(z) = j_l(z) + iy_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(z), \quad (\text{III.39})$$

$$h_l^{(2)}(z) = j_l(z) - iy_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(z). \quad (\text{III.40})$$

Le funzioni $j_l(z)$, $y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z)$ e $h_l^{(1,2)}(z)$ si dicono *funzioni sferiche di Bessel* di prima, seconda e terza specie. Quindi

$$\begin{aligned} j_0(z) &= \frac{\sin(z)}{z}, \\ j_1(z) &= \frac{\sin(z)}{z^2} - \frac{\cos(z)}{z}, \\ j_2(z) &= \left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z} \right) \sin(z) - \frac{3}{z^2} \cos(z), \\ y_0(z) &= -n_0(z) = -\frac{\cos(z)}{z}, \\ y_1(z) &= n_1(z) = -\frac{\cos(z)}{z^2} - \frac{\sin(z)}{z}, \\ y_2(z) &= -n_2(z) = \left(-\frac{3}{z^3} + \frac{1}{z} \right) \cos(z) - \frac{3}{z^2} \sin(z). \end{aligned}$$

Si vede facilmente che

$$y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z) = (-1)^{l+1} j_{-l-1}(z). \quad (\text{III.41})$$

È anche abbastanza facile trovare le seguenti espressioni esplicite:

$$j_l(z) = z^l \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \frac{\sin(z)}{z}, \quad y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z) = -z^l \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \frac{\cos(z)}{z}. \quad (\text{III.42})$$

Asintoticamente (se $x \rightarrow +\infty$) abbiamo le seguenti espressioni:

$$j_l(x) = \begin{cases} (-1)^{l/2} \frac{\sin(x)}{x}, & l \text{ pari,} \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{\cos(x)}{x}, & l \text{ dispari,} \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

$$y_l(x) = (-1)^{l+1} n_l(z) = \begin{cases} (-1)^{(l+2)/2} \frac{\cos(x)}{x}, & l \text{ pari,} \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{\sin(x)}{x}, & l \text{ dispari,} \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

$$h_l^{(1)}(x) = \begin{cases} -i(-1)^{l/2} \frac{e^{ix}}{x}, & l \text{ pari,} \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{e^{ix}}{x}, & l \text{ dispari,} \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

$$h_l^{(2)}(x) = \begin{cases} i(-1)^{l/2} \frac{e^{-ix}}{x}, & l \text{ pari,} \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{e^{-ix}}{x}, & l \text{ dispari.} \end{cases} \quad (\text{III.46})$$

Sostituendo $y = \sqrt{x} Y$ nell'equazione di Bessel di ordine $\nu = l + \frac{1}{2}$ si arriva all'equazione differenziale

$$Y'' + \frac{2}{x} Y' + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) Y = 0 \quad (\text{III.47})$$

per le funzioni j_l , $y_l = (-1)^{l+1} n_l$, $h_l^{(1)}$ e $h_l^{(2)}$. Ponendo $Y = Z/x$ si ha inoltre

$$Z'' + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) Z = 0 \quad (\text{III.48})$$

per le funzioni $xj_l(x)$, $xy_l(x) = (-1)^{l+1} xn_l(x)$, $xh_l^{(1)}(x)$ e $xh_l^{(2)}(x)$.

3 Funzioni sferiche

Consideriamo adesso una classe di funzioni speciali molto importante per la fisica matematica.

3.1 Funzioni sferiche

Si dice *funzione sferica* di ordine $l = 0, 1, 2, \dots$ ogni polinomio armonico⁴ omogeneo di grado l considerato sulla sfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Dunque, tra

⁴Una funzione $v = v(x_1, \dots, x_n)$ si dice *armonica* se $\Delta v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = 0$.

le funzioni sferiche $Y_l(s)$, $s \in S^{n-1}$, di ordine l ed i polinomi armonici omogenei $u_l(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, l'identità

$$Y_l(s) = u_l\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{u_l(x)}{|x|^l}, \quad s = \frac{x}{|x|}, \quad (\text{III.49})$$

dove $\Delta u_l = 0$, stabilisce una corrispondenza biunivoca.

Le funzioni sferiche Y_l e $Y_{l'}$, di ordini diversi sono ortogonali in $L^2(S^{n-1})$, cioè

$$(Y_l, Y_{l'}) = \int_{S^{n-1}} Y_l(s) Y_{l'}(s) ds = 0, \quad l \neq l'.$$

Infatti, applicando per la sfera la formula di Green ai polinomi armonici

$$u_l(x) = |x|^l Y_l\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad u_{l'}(x) = |x|^{l'} Y_{l'}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|x| \leq 1} \left[|x|^{l'} Y_{l'} \Delta(|x|^l Y_l) - |x|^l Y_l \Delta(|x|^{l'} Y_{l'}) \right] dx \\ &= \int_{S^{n-1}} \left[|x|^{l'} Y_{l'} \frac{\partial(|x|^l Y_l)}{\partial n} - |x|^l Y_l \frac{\partial(|x|^{l'} Y_{l'})}{\partial n} \right] ds \\ &= \int_{S^{n-1}} \left[Y_{l'} \frac{\partial(r^l Y_l)}{\partial r} - Y_l \frac{\partial(r^{l'} Y_{l'})}{\partial r} \right] ds = (l - l') \int_{S^{n-1}} Y_l(s) Y_{l'}(s) ds, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

Consideriamo ora le funzioni sferiche sulla circonferenza S^1 ($n = 2$). In coordinate polari abbiamo

$$u_l(x) = r^l Y_l(\theta), \quad x = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

dove $\Delta u_l = 0$. Risulta l'equazione differenziale

$$Y_l''(\theta) + l^2 Y_l(\theta) = 0,$$

da cui seguono le funzioni trigonometriche

$$Y_l(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & l = 0 \\ c_1 \cos(l\theta) + c_2 \sin(l\theta), & l = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Consideriamo ora le funzioni sferiche sulla sfera S^2 ($n = 3$). In coordinate sferiche abbiamo per $y_l(x) = r^l Y_l(\theta, \varphi)$

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial Y_l}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 Y_l}{\partial \theta^2} + l(l+1) Y_l(\theta, \varphi) = 0, \quad (\text{III.50})$$

dove $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ e $l = 0, 1, 2, \dots$. Cerchiamo le soluzioni della (III.50) in $C^\infty(S^2)$. Introduciamo prima $\xi = \cos \varphi$ e scriviamo (III.50) nella forma

$$\frac{1}{1-\xi^2} \frac{\partial^2 Y_l}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1-\xi^2) \frac{\partial Y_l}{\partial \xi} \right) + l(l+1)Y_l(\theta, \xi) = 0. \quad (\text{III.51})$$

Applicando la separazione delle variabili

$$Y_l(\theta, \varphi) = \mathcal{P}(\xi)\Theta(\theta),$$

otteniamo

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ c_1 \cos m\theta + c_2 \sin m\theta, & m = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

dove abbiamo sfruttato la periodicità della $\Theta(\theta)$: $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$. Dunque $\Theta''(\theta) = -m^2\Theta(\theta)$. Risulta l'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\xi} \left((1-\xi^2) \frac{d\mathcal{P}}{d\xi} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2} \right] \mathcal{P}(\xi) = 0. \quad (\text{III.52})$$

Quest'equazione si può scrivere nella forma

$$-[(1-\xi^2)\mathcal{P}']' + \frac{m^2}{1-\xi^2}\mathcal{P} = l(l+1)\mathcal{P}.$$

Le soluzioni di quest'equazione nei punti ± 1 debbono assumere valori finiti.

3.2 Polinomi di Legendre

I polinomi di Legendre $P_l(\xi)$ si possono definire nei seguenti modi:

1. tramite la formula generatrice

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\xi h+h^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\xi)h^l, \quad |h| < 1,$$

2. tramite l'equazione differenziale,

$$-[(1-x^2)P_l']'(x) = l(l+1)P_l(x), \quad -1 < x < +1; \quad P_l(1) = 1,$$

3. tramite l'ortogonalità: $P_l(\xi)$ sono i polinomi in ξ di grado l con coefficiente principale positivo tali che

$$\int_{-1}^1 P_l(\xi)P_{l'}(\xi) d\xi = \delta_{ll'} \frac{2}{2l+1},$$

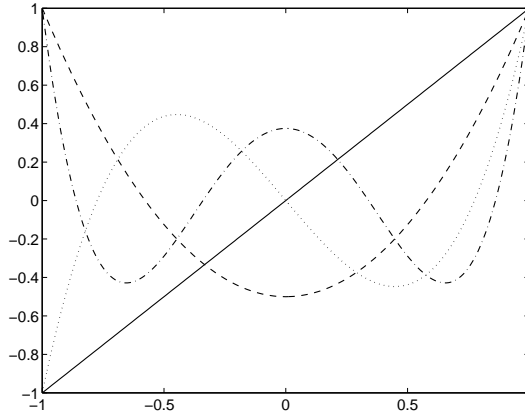


Figura III.3: I polinomi di Legendre di grado 1, 2, 3 e 4. Si osservi che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

4. tramite la formula di Rodrigues

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{d\xi} \right)^l (\xi^2 - 1)^l,$$

5. tramite la formula di ricorrenza

$$(2l + 1)\xi P_l(\xi) = (l + 1)P_{l+1}(\xi) + lP_{l-1}(\xi), \quad P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi.$$

Noi dimostriamo l'equivalenza tra queste definizioni.

4 \Rightarrow 2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$-[(1 - x^2)u']'(x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < +1, \quad (\text{III.53})$$

sotto le condizioni iniziali che i limiti di $u(x)$ per $x \rightarrow \pm 1$ esistano finiti. Questo problema al contorno ha soluzioni polinomiali per $\lambda = l(l + 1)$ dove $l = 0, 1, 2, \dots$. Verifichiamo se i polinomi

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{III.54})$$

soddisfano la (III.53) per $\lambda = l(l + 1)$. Questi polinomi (di grado l) sono detti *polinomi di Legendre* e la (III.54) si dice *formula di Rodrigues*. Infatti, ponendo $W_l(x) = (x^2 - 1)^l$ e derivando l'identità

$$(x^2 - 1)W_l'(x) - 2lxW_l(x) = 0$$

$l + 1$ volte, si ottiene

$$(x^2 - 1)W_l^{(l+2)}(x) + 2xW_l^{(l+1)}(x) - l(l+1)W_l^{(l)}(x) = 0.$$

Dunque la funzione $W_l^{(l)}(x) = 2^l(l!)P_l(x)$ soddisfa l'equazione (III.53). Inoltre,

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!} \sum_{s=0}^l \binom{l}{s} \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^s (x-1)^l \right) \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{l-s} (x+1)^l \right) \\ &= \frac{1}{2^l l!} \sum_{s=0}^l \binom{l}{s} \left(\frac{l!}{(l-s)!} (x-1)^{l-s} \right) \left(\frac{l!}{s!} (x+1)^s \right), \end{aligned}$$

il quale implica che $P_l(1) = 1$ e $P_l(-1) = (-1)^l$.

2 \Rightarrow 4. Sostituendo $u(x) = P_l(x)z(x)$ e $w(x) = z'(x)$ nella (III.53) con $\lambda = l(l+1)$, otteniamo l'equazione separabile

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = -2 \frac{P_l'(x)}{P_l(x)} + \frac{2x}{1-x^2},$$

implicando che

$$y(x) = c_1 P_l(x) + c_2 P_l(x) \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)P_l(t)^2}.$$

L'integrale nell'ultima espressione è divergente in $x = \pm 1$ (poichè $P_l(\pm 1)^2 = 1$). Quindi $P_l(x)$ è l'unica soluzione dell'equazione differenziale (III.53) con $\lambda = l(l+1)$ che soddisfa $P_l(1) = 1$. Siccome la formula di Rodrigues rappresenta una tale soluzione, si ottiene questa formula dalla proprietà 2.

(2 + 4) \Rightarrow 3. Si dimostra facilmente che i polinomi di Legendre sono ortogonali nello spazio $L^2(-1, 1)$. Infatti, utilizzando la (III.53) si ha

$$\begin{aligned} & [l(l+1) - k(k+1)] \int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[P_l(k) [(1-x^2)P_k']' - P_k(x) [(1-x^2)P_l']' \right] dx \\ &= - \int_{-1}^1 \left[P_l'(k)(1-x^2)P_k'(x) - P_k'(x)(1-x^2)P_l'(x) \right] dx = 0, \end{aligned}$$

dopo un'integrazione per parti. Quindi $(P_l, P_k) = \int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x) dx = 0$ se $l \neq k$. Per trovare il fattore di normalizzazione, calcoliamo (P_l, P_l) tramite l

integrazioni per parti consecutive. Otteniamo

$$\begin{aligned}(P_l, P_l) &= \frac{(-1)^l}{2^{2l} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l \\ &= \frac{(2l)!}{2^{2l} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^l dx = \frac{(2l)!}{2^{2l} \cdot (l!)^2} \frac{2^{l+1} \cdot l!}{(2l+1)(2l-1)\cdots 1} = \frac{2}{2l+1},\end{aligned}$$

dove è stata applicata la formula di ricorrenza $(I_{l-1}/I_l) = 1 + (1/2l)$, $I_0 = 2$, per $I_l = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^l dx$. Quindi $\sqrt{l + \frac{1}{2}} P_l(x)$ ha norma 1 in $L^2(-1, 1)$.

(3 + 4) ⇒ 5. Per trovare una formula di ricorrenza per i polinomi di Legendre calcoliamo prima il prodotto scalare (P_{l+1}, xP_l) . Infatti, dopo $l + 1$ integrazioni per parti consecutive e utilizzando $(x f)^{(l+1)} = x f^{(l+1)} + (l+1) f^{(l)}$ si ottiene

$$\begin{aligned}(P_{l+1}, xP_l) &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1} \cdot ((l+1)!(l!))} \cdot \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{l+1} \left[x \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l+1} (x^2 - 1)^l + (l+1) \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l \right] dx \\ &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{l+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l dx \\ &= \frac{1}{2^{2l+1} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{l+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l dx \\ &= \frac{(2l)!}{2^{2l+1} \cdot (l!)^2} \frac{2^{l+2} \cdot (l+1)!}{(2l+3)(2l+1)\cdots 3 \cdot 1} = \frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}.\end{aligned}$$

Siccome i polinomi di Legendre sono ortogonali, essi sono linearmente indipendenti. Dunque

$$(2l+1)xP_l(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j P_j(x),$$

dove $a_j = 0$ per $j > l + 1$ [poichè $xP_l(x)$ ha grado $l + 1$]. Risultano $(2l + 1)(xP_l, P_j) = (2l + 1)(P_l, xP_j) = 0$ per $j < l - 1$ [poichè $xP_j(x)$ ha grado $< l$] e $(2l + 1)(xP_l, P_l) = 0$ [poichè $xP_l(x)^2$ è una funzione dispari]. Quindi

$$(2l+1)xP_l(x) = a_{l+1}P_{l+1}(x) + a_{l-1}P_{l-1}(x).$$

Infine troviamo

$$\begin{aligned}(2l+1)(xP_l, P_{l+1}) &= a_{l+1}(P_{l+1}, P_{l+1}) = a_{l+1}(2/(2l+3)); \\ (2l+1)(xP_{l-1}, P_l) &= a_{l-1}(P_{l-1}, P_{l-1}) = a_{l-1}(2/(2l-1)).\end{aligned}$$

Quindi $a_{l+1} = l + 1$ e $a_{l-1} = l$. Risulta la *formula di ricorrenza*

$$(2l + 1)xP_l(x) = (l + 1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x), \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x. \quad (\text{III.55})$$

Per induzione matematica si dimostrano facilmente

$$\begin{aligned} P_l(1) = 1, \quad P_l(-1) = (-1)^l, \quad P_l(-x) = (-1)^l P_l(x); \\ -1 \leq P_l(x) \leq +1, \quad -1 \leq x \leq +1. \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

5 \Rightarrow 1. Dimostriamo ora la *formula generatrice*

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)h^l = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xh + h^2}}, \quad |h| < 1. \quad (\text{III.57})$$

Infatti, scriviamo $F(x, h)$ per la parte a sinistra della (III.57). Per $|h| < 1$ è permessa la derivazione termine a termine rispetto ad h , grazie alla (III.56). Si trovano facilmente le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)xP_l(x)h^l &= xF(x, h) + 2xh \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)h^{l-1} = xF(x, h) + 2xh \frac{\partial F}{\partial h}; \\ \sum_{l=0}^{\infty} (l + 1)P_{l+1}(x)h^l &= \sum_{l=1}^{\infty} lP_l(x)h^{l-1} = \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)h^{l-1} = \frac{\partial F}{\partial h}; \\ \sum_{l=1}^{\infty} lP_{l-1}(x)h^l &= h^2 \sum_{l=1}^{\infty} (l - 1)P_{l-1}(x)h^{l-2} + h \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x)h^{l-1} \\ &= h^2 \frac{\partial F}{\partial h} + hF(x, h). \end{aligned}$$

Applicando la (III.55) si ha

$$xF(x, h) = (1 - 2xh + h^2) \frac{\partial F}{\partial h} + hF(x, h),$$

dove $F(x, 0) = P_0(x) = 1$. Oppure:

$$\frac{\partial F / \partial h}{F(x, h)} = \frac{x - h}{1 - 2xh + h^2}, \quad F(x, 0) = 1.$$

La soluzione unica di questo problema di Cauchy è la funzione $F(x, h)$ data dalla parte a destra della (III.57).

1 \Rightarrow 2. Scrivendo $F(x, h)$ per la parte a destra nella (III.57) risulta (dopo alcuni calcoli)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((1 - x^2) \frac{\partial F}{\partial x} \right) = -h \left(\frac{\partial}{\partial h} \right)^2 (hF(x, h)).$$

In altre parole,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) h^l \right) = - \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1) P_l(x) h^l.$$

Ciò implica l'equazione differenziale. Infine, sostituendo $x = 1$ nella (III.57) si ha

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(1) h^l = \frac{1}{\sqrt{(1-h)^2}} = \frac{1}{1-h},$$

implicando $P_l(1) = 1$.

3.3 Funzioni di Legendre associate

Sostituiamo $\mathcal{P}(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2} z(\xi)$ nella (III.52). Risulta

$$(1-\xi^2)z''(\xi) - 2(m+1)\xi z'(\xi) + (l-m)(l+m+1)z(\xi) = 0. \quad (\text{III.58})$$

Moltiplicando la (III.58) per $(1-\xi^2)^m$, otteniamo per $z = \mathcal{P}_l$

$$[(1-\xi^2)^{m+1}\mathcal{P}_l']' = -(l-m)(l+m+1)(1-\xi^2)^m \mathcal{P}_l. \quad (\text{III.59})$$

Per $m = 0$ risulta l'equazione differenziale per il polinomio di Legendre di grado l :

$$(1-\xi^2)P_l''(\xi) - 2\xi P_l'(\xi) + l(l+1)P_l(\xi) = 0.$$

Calcolando la derivata m -esima $z = P_l^{(m)}$ di quest'equazione otteniamo

$$(1-\xi^2)z''(\xi) - 2(m+1)z'(\xi) + (l-m)(l+m+1)z(\xi) = 0.$$

Quindi le funzioni $(d/d\xi)^m P_l(\xi)$ sono soluzioni della (III.58). Moltiplicando la (III.59) per $P_{l'}(\xi)$ e la (III.59) con l' invece di l per $P_l(\xi)$ e sottraendo, otteniamo

$$[(l-l')(l+l'+1)](1-\xi^2)^m \mathcal{P}_l(\xi) \mathcal{P}_{l'}(\xi) = \mathcal{P}_l(\xi) [(1-\xi^2)^{m+1}\mathcal{P}_{l'}']' - \mathcal{P}_{l'}(\xi) [(1-\xi^2)^{m+1}\mathcal{P}_l']'.$$

Integrando quest'equazione tra -1 e $+1$ e applicando l'integrazione per parti risulta

$$[(l-l')(l+l'+1)] \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^m \mathcal{P}_l(\xi) \mathcal{P}_{l'}(\xi) d\xi = 0.$$

Quindi, se $P_l(\xi)$ sono i polinomi di Legendre, i polinomi $(d/d\xi)^m P_{l+m}(\xi)$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) sono un sistemi di polinomi ortogonali (di grado l) rispetto al peso $w(\xi) = (1-\xi^2)^m$.

Troviamo ora la costante di normalizzazione. Si ha

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi) P_{l'}^{(m)}(\xi) d\xi \\
&= \left[(1 - \xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi) P_{l'}^{(m-1)}(\xi) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_{l'}^{(m-1)}(\xi) \left[(1 - \xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi) \right]' d\xi \\
&= (l - m + 1)(l + m) \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{m-1} P_l^{(m-1)}(\xi) P_{l'}^{(m-1)}(\xi) d\xi \\
&= (l + m)(l - m + 1)(l + m - 1)(l - m + 2) \times \\
&\times \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{m-2} P_l^{(m-2)}(\xi) P_{l'}^{(m-2)}(\xi) d\xi \\
&= \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \int_{-1}^1 P_l(\xi) P_{l'}(\xi) d\xi = \frac{2}{2l + 1} \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \delta_{l,l'}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\left(\frac{2(l + m) + 1}{2} \frac{l!}{(l + 2m)!} \right)^{1/2} \left(\frac{d}{d\xi} \right)^m P_{l+m}(\xi), \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

è il sistema ortonormale dei polinomi rispetto al peso $(1 - \xi^2)^m$ [con coefficiente di ξ^l positivo].

3.4 Le funzioni sferiche per $n = 3$: Completezza

Nella letteratura ci sono diverse normalizzazioni delle funzioni sferiche in \mathbb{R}^3 . Qui ne scegliamo una. Poniamo

$$Y_l^m(\varphi, \theta) = \begin{cases} P_l^m(\cos \varphi) (\sin \varphi)^m \cos(m\theta), & m = 0, 1, \dots, l; \\ P_l^{|m|}(\cos \varphi) (\sin \varphi)^{-m} \sin(|m|\theta), & m = -1, -2, \dots, -l, \end{cases}$$

dove $l = 0, 1, 2, \dots$. Le funzioni sferiche Y_l^m ($m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$) di ordine l sono linearmente indipendenti e le loro combinazioni lineari

$$Y_l(s) = \sum_{m=-l}^l a_l^{(m)} Y_l^m(s)$$

a coefficienti arbitrari $a_l^{(m)}$ sono anch'esse funzioni sferiche di ordine l .

Le funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ formano un sistema ortogonale e completo in $L^2(S^2)$, ed inoltre

$$\|Y_l^m\|_{L^2(S^2)}^2 = 2\pi \frac{1 + \delta_{0,m}}{2l + 1} \frac{(l + |m|)!}{l - |m|!}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \|Y_l^m\|^2 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |Y_l^m(\theta, \varphi)|^2 d\theta d\varphi \\ &= \int_{-1}^1 P_l^{|m|}(\xi)^2 (1 - \xi^2)^{|m|} d\xi \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 m\theta \\ \sin^2 m\theta \end{array} \right\} d\theta = 2\pi \frac{(1 + \delta_{0,m})}{(2l + 1)} \frac{(l + |m|)!}{(l - |m|)!}. \end{aligned}$$

La completezza di un sistema ortogonale di funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ significa che ogni funzione f appartenente a $L^2(S^2)$ può essere sviluppata in serie di Fourier di queste funzioni:

$$f(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_l^{(m)} Y_l^m(s) = \sum_{l=0}^{\infty} Y_l(s),$$

convergente in $L^2(S^2)$. I coefficienti $a_l^{(m)}$ sono calcolati mediante la formula

$$a_l^{(m)} = \frac{2l + 1}{2\pi(1 + \delta_{0,m})} \frac{(l - |m|)!}{(l + |m|)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) \sin \varphi d\theta d\varphi.$$

Le funzioni sferiche Y_l^m , $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$, sono autofunzioni dell'operatore di Beltrami,

$$-\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

che corrisponde all'autovalore $\lambda = l(l + 1)$ di molteplicità $2l + 1$.

4 Polinomi di Hermite

L'equazione di Laplace in coordinate parabolico-cilindriche (u, v, z) (anche dette coordinate paraboliche) ha la forma (II.5). Sostituendo

$$\psi(u, v, z) = U(u)V(v)Z(z)$$

otteniamo

$$\frac{1}{c^2(u^2 + v^2)} \left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)} \right) + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0.$$

Se richiediamo che $Z(z)$ sia limitata, risulta

$$\frac{1}{c^2(u^2 + v^2)} \left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)} \right) = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda^2,$$

dove $\lambda \geq 0$ è una costante. Dunque

$$\begin{aligned} U''(u) + (\mu - \lambda^2 c^2 u^2)U(u) &= 0, \\ V''(v) - (\mu + \lambda^2 c^2 v^2)V(v) &= 0, \end{aligned}$$

dove μ è un'altra costante. Introducendo le variabili $\xi = u\sqrt{c\lambda}$ e $\eta = v\sqrt{c\lambda}$, dove $\xi \in \mathbb{R}$ e $\eta \geq 0$, e ponendo $\mu = (2\nu + 1)c\lambda$ otteniamo

$$\begin{aligned} U''(\xi) + (2\nu + 1 - \xi^2)U(\xi) &= 0, \\ V''(\eta) - (2\nu + 1 + \eta^2)V(\eta) &= 0. \end{aligned}$$

Studiamo ora l'equazione

$$u'' + (2\nu + 1 - z^2)u = 0, \quad (\text{III.60})$$

dove u , z e ν non hanno più lo stesso significato come prima. Sostituendo

$$u = e^{-z^2/2} v, \quad (\text{III.61})$$

risulta l'equazione

$$v'' - 2zv' + 2\nu v = 0. \quad (\text{III.62})$$

Per $\nu = 0, 1, 2, \dots$ la (III.62) si dice *equazione differenziale di Hermite*. Le soluzioni della (III.60) si dicono funzioni parabolico-cilindriche.

Sostituendo $v(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l$ nella (III.62) si trova la seguente espressione per il coefficiente di z^l :

$$(l+2)(l+1)c_{l+2} + 2(\nu-l)c_l = 0. \quad (\text{III.63})$$

La (III.63) è una relazione di ricorrenza che ci consente a calcolare tutti i coefficienti c_l dai coefficienti $c_0 = v(0)$ e $c_1 = v'(0)$. Si vede facilmente che esistono soluzioni polinomiali se e solo se $\nu = n = 0, 1, 2, \dots$. Tali soluzioni hanno la proprietà $v(-z) = (-1)^n v(z)$ e hanno il grado n (cioè, $c_{n+2} = c_{n+4} = c_{n+6} = \dots = 0$).

Definiamo ora

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \left(\frac{d}{dz} \right)^n \{ e^{-z^2} \}. \quad (\text{III.64})$$

Allora $H_n(z)$ è un polinomio di grado n , ha il coefficiente principale positivo e soddisfa $H_n(-z) = (-1)^n H_n(z)$. Derivando l'equazione $w' + 2zw = 0$ (che ha la soluzione $w \sim e^{-z^2}$) $n+1$ volte e ponendo $u = w^{(n)}$ risulta

$$u'' + 2zu' + 2(n+1)u = 0.$$

Poi si sostituisca $u = e^{-z^2} v$. Infine risulta l'equazione (III.62) per $\nu = n$:

$$v'' - 2zv' + 2nv = 0. \quad (\text{III.65})$$

In altre parole, il polinomio di Hermite $H_n(z)$ soddisfa l'equazione differenziale di Hermite (III.65). La (III.64) si dice formula di Rodriguez.

Scriviamo ora la (III.62) nella forma

$$(e^{-z^2} v')' = -2n e^{-z^2} v.$$

Allora

$$2(n-m)H_n(z)H_m(z)e^{-z^2} = (e^{-z^2} H'_m)' H_n(z) - (e^{-z^2} H'_n)' H_m(z).$$

Calcolando l'integrale rispetto a z si ottiene

$$\begin{aligned} 2(n-m) \int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2} dz &= \left[e^{-z^2} (H'_m(z)H_n(z) - H'_n(z)H_m(z)) \right]_{z=-\infty}^{\infty} \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-z^2} H'_m(z)H'_n(z) - e^{-z^2} H'_n(z)H'_m(z) \right) dz = 0. \end{aligned}$$

Quindi i polinomi di Hermite formano un sistema ortogonale nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}; e^{-z^2} dz)$. Per calcolare la costante di normalizzazione si applichi-
no la formula di Rodriguez (III.64) e n integrazioni per parti, risultando nella
seguente successione di passaggi:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)^2 e^{-z^2} dz &= \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j+1} \left[H_n^{(j-1)}(z) \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-j} \{e^{-z^2}\} \right]_{z=-\infty}^{\infty} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{d}{dz} \right)^n H_n(z) \right) e^{-z^2} dz \\ &= \left[p(z)e^{-z^2} \right]_{z=-\infty}^{\infty} + c_n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = c_n n! \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

dove $p(z)$ è un polinomio e c_n è il coefficiente principale di $H_n(z)$ (cioè, $H_n(z) = c_n z^n + \dots$). Calcoliamo ora i coefficienti c_n . Derivando la formula di Rodriguez (III.64) si arriva all'identità

$$H'_n(z) = 2zH_n(z) - H_{n+1}(z). \quad (\text{III.66})$$

Confrontando i coefficienti di z^{n+1} nella (III.66) otteniamo $0 = 2c_n - c_{n+1}$,
mentre $c_0 = 1$. Quindi $c_n = 2^n$. Infine si arriva alla seguente formula di
ortogonalità:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2} dz = 2^n (n!) \sqrt{\pi} \delta_{n,m}, \quad (\text{III.67})$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

Derivando la (III.65) rispetto a z e scrivendo il risultato come un'equazione differenziale per v' si ottiene

$$(v')'' - 2z(v')' + 2(n-1)(v') = 0.$$

Dunque $H'_n(z)$ e $H_{n-1}(z)$ sono soluzioni della stessa equazione differenziale che ha soltanto una singola soluzione polinomiale linearmente indipendente. Di conseguenza, $H'_n(z) = \text{cost.} H_{n-1}(z)$. Siccome $H_n(z) = 2^n z^n + \dots$ e $H_{n-1}(z) = 2^{n-1} z^{n-1} + \dots$, risulta $n 2^n = \text{cost.} 2^{n-1}$ e quindi $\text{cost.} = 2n$. In altre parole,

$$H'_n(z) = 2n H_{n-1}(z). \quad (\text{III.68})$$

Dalle equazioni (III.66) e (III.68) arriviamo alla formula di ricorrenza

$$2zH_n(z) = H_{n+1}(z) + 2nH_{n-1}(z), \quad (\text{III.69})$$

dove $H_0(z) = 1$ e $H_1(z) = 2z$. In Fig. III.4 abbiamo tracciato alcuni grafici dei polinomi di Hermite.

Dimostriamo ora la formula generatrice

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} t^n, \quad t \in \mathbb{C}. \quad (\text{III.70})$$

Infatti, ponendo $F(z, t) = e^{2zt-t^2}$ e scrivendo

$$F(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(z)}{n!} t^n \quad (\text{III.71})$$

per opportuni coefficienti $h_n(z)$, risultano

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2tF(z, t)$$

e [poichè?]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h'_n(z)}{n!} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h_{n-1}(z)}{(n-1)!} t^n.$$

Quindi $h_n(z)$ è un polinomio in z di grado n e

$$h'_n(z) = 2nh_{n-1}(z). \quad (\text{III.72})$$

Dalla (III.71) risulta che $h_n(0)$ coincide con la derivata n -esima di e^{-t^2} per $t = 0$, cioè con 0 se n è dispari, e con $(-1)^{n/2}(n!)/(n/2)!$ se n è pari. Dalla formula di Rodriguez (III.64) si vede facilmente che $H_n(0) = h_n(0)$ per $n = 0, 1, 2, \dots$. Utilizzando le espressioni (III.68) e (III.72) arriviamo alla identità $H_n(z) = h_n(z)$ e quindi alla formula generatrice (III.70).

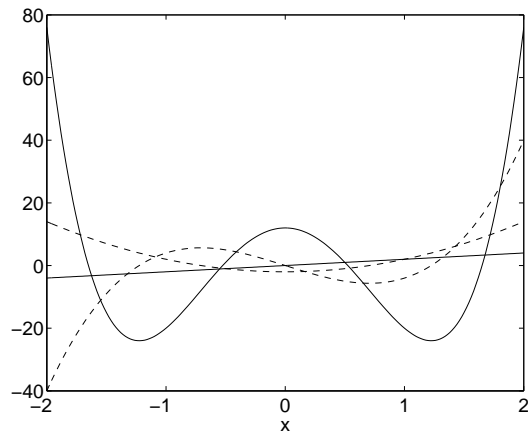


Figura III.4: I polinomi di Hermite di grado 1, 2, 3 e 4. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

5 Polinomi di Laguerre

I *polinomi di Laguerre* si definiscono tramite la seguente formula di Rodriguez:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \{x^{n+\alpha} e^{-x}\}. \quad (\text{III.73})$$

Si dimostra facilmente che la (III.73) rappresenta un polinomio di grado n per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. La regola di Leibnitz ci dà subito la rappresentazione $L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n (x^n/n!) + \dots$. Ci limitiamo al caso $\alpha > -1$.

La funzione $w(x) = x^{n+\alpha} e^{-x}$ soddisfa l'equazione differenziale

$$xw' + (x - n - \alpha)w = 0. \quad (\text{III.74})$$

Derivando la (III.74) $n + 1$ volte e ponendo $u = w^{(n)}$ si arriva all'equazione differenziale

$$xu'' + (x + 1 - \alpha)u' + (n + 1)u = 0.$$

Sostituendo $u = x^\alpha e^{-x}v$ in quest'ultima equazione si ottiene la seguente equazione differenziale di Laguerre:

$$xv'' + (\alpha + 1 - x)v' + \nu v = 0. \quad (\text{III.75})$$

Di conseguenza, $L_n^{(\alpha)}(x)$ è una soluzione dell'equazione (III.75).

Consideriamo ora l'equazione differenziale

$$xv'' + (\alpha + 1 - x)v' + \nu v = 0. \quad (\text{III.76})$$

Sostituendo $v(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^l$ si trova la seguente espressione per il coefficiente di x^l :

$$(l + 1)(l + \alpha + 1)c_{l+1} + (\nu - l)c_l = 0.$$

Quindi abbiamo trovato la formula di ricorrenza

$$\frac{c_{l+1}}{c_l} = \frac{l - \nu}{(l + 1)(l + \alpha + 1)}, \quad (\text{III.77})$$

che ci consente a calcolare tutti i coefficienti c_l dal coefficiente iniziale $c_0 = v(0)$; bisogna richiedere $\alpha > -1$ per garantire la positività del denominatore nella parte a destra della (III.77). Risulta una soluzione polinomiale di grado $n = 0, 1, 2, \dots$ se e solo se $\nu = n$.

Scrivendo la (III.75) nella forma

$$(x^{\alpha+1} e^{-x} v')' + n x^\alpha e^{-x} v = 0, \quad (\text{III.78})$$

otteniamo

$$(n-m)x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) \left(x^{\alpha+1} e^{-x} L_m^{(\alpha)'}(x) \right)' - L_m^{(\alpha)}(x) \left(x^{\alpha+1} e^{-x} L_n^{(\alpha)'}(x) \right)'$$

Calcolando l'integrale sull'intervallo $(0, \infty)$ [dove l'ipotesi $\alpha > -1$ serve per la convergenza dell'integrale] si ottiene

$$\begin{aligned} & (n-m) \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \left[L_n^{(\alpha)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} L_m^{(\alpha)'}(x) - L_m^{(\alpha)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} L_n^{(\alpha)'}(x) \right]_{x=0}^\infty \\ & - \int_0^\infty \left\{ L_n^{(\alpha)'}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} L_m^{(\alpha)'}(x) - L_m^{(\alpha)'}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} L_n^{(\alpha)'}(x) \right\} dx = 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $x^{\alpha+1} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$. Quindi per $\alpha > -1$ i polinomi di Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ formano un sistema ortogonale nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+; x^\alpha e^{-x} dx)$.

Per calcolare la costante di normalizzazione facciamo i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)^2 x^\alpha e^{-x} dx &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} dx \\
&= \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n L_n^{(\alpha)}(x) \right) x^{n+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x) \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^n}{n!} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n L_n^{(\alpha)}(x) \right) \int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},
\end{aligned}$$

dove abbiamo fatto n integrazioni per parti, utilizzato la (III.73) con $\alpha + j$ al posto di α , applicato l'espressione $L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n (x^n/n!) + \dots$ e l'identità (A.1). In altre parole,

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{n,m}, \quad (\text{III.79})$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

Derivando la (III.75) si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$x(v')'' + (\alpha + 2 - x)(v')' + (n - 1)(v') = 0.$$

Quindi $L_n^{(\alpha)'}(x)$ è proporzionale a $L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$. Siccome

$$L_n^{(\alpha)'}(x) = \frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots, \quad L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots,$$

risulta per $\alpha > -1$

$$L_n^{(\alpha)'}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x). \quad (\text{III.80})$$

L'ortogonalità di $L_n^{(\alpha)}(x)$ a tutti i polinomi di grado minore di n nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+; x^\alpha e^{-x} dx)$ conduce all'identità

$$xL_n^{(\alpha)}(x) = A_n^{(\alpha)} L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + B_n^{(\alpha)} L_n^{(\alpha)}(x) + C_n^{(\alpha)} L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad (\text{III.81})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$ e A_n, B_n e C_n sono opportune costanti da determinare. Calcoliamo ora il seguente integrale:

$$\begin{aligned}
C_n^{(\alpha)} &= \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x^{n+1+\alpha} e^{-x}\} dx \\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1-j} \{x^{n+1+\alpha} e^{-x}\} \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+1+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \left[\frac{(-1)^n}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) (n+1-j)! x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n+1-j}^{(\alpha+j)}(x) \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) \int_0^\infty x^{n+1+\alpha} e^{-x} dx \\
&= -\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!},
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $x L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n (x^{n+1}/n!) + \dots$. Poi calcoliamo il

seguinte integrale:

$$\begin{aligned}
D_n^{(\alpha)} &= \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x)^2 x^\alpha e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} dx \\
&= \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) (-1)^{n-j} (n-j)! x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x) \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty ((n+1)! x - n(n+\alpha)n!) x^{n+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \frac{(n+1)\Gamma(n+\alpha+2) - n(n+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \\
&= \frac{(2n+1+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $x L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n ((x^{n+1} - n(n+\alpha)x^n)/n!) + \dots$. Dalla (III.81) e le espressioni per $C_n^{(\alpha)}$ e $D_n^{(\alpha)}$ seguono $A_n^{(\alpha)} = -(n+1)$, $B_n^{(\alpha)} = 2n+1+\alpha$ e $C_n^{(\alpha)} = -(n+\alpha)$. Dunque risulta la formula di ricorrenza

$$(2n+1+\alpha-x)L_n^{(\alpha)}(x) = (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad (\text{III.82})$$

dove $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = 1+\alpha-x$. In Fig. III.5 abbiamo tracciato i grafici di alcuni polinomi di Laguerre.

Per dimostrare la validità della formula generatrice

$$(1-t)^{-(1+\alpha)} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n, \quad |t| < 1, \quad (\text{III.83})$$

partiamo dalla serie di funzioni

$$F(x, t) = (1-t)^{-(1+\alpha)} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)t^n, \quad |t| < 1, \quad (\text{III.84})$$

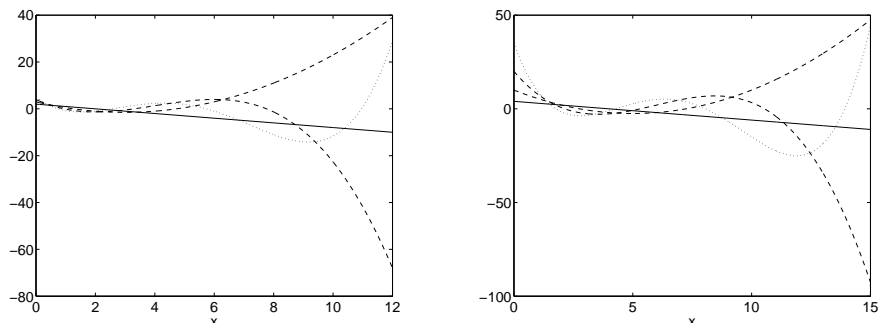


Figura III.5: I polinomi di Laguerre di grado 1, 2, 3 e 4 per $\alpha = 1$ (panello sinistro) e $\alpha = 3$ (panello destro). Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

dove $c_n(x) n!$ è la derivata parziale n -esima di $F(x, t)$ rispetto a t per $t = 0$. Sostituendo la serie (III.84) nella equazione

$$(1-t)^2 \frac{\partial F}{\partial t} + [x - (1+\alpha)(1-t)] F = 0,$$

otteniamo le seguenti espressioni per i coefficienti t^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) e per il coefficiente di t^0 :

$$\begin{cases} (n+1)c_{n+1}(x) + (x - 2n - \alpha - 1)c_n(x) + (n+\alpha)c_{n-1}(x), \\ c_1(x) + (x - \alpha - 1)c_0(x) = 0, \end{cases}$$

dove $c_0(x) = 1$. Quindi $c_n(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$ per $n = 0, 1, 2, \dots$ (vedi la (III.82)).

Infine, per esprimere i polinomi di Hermite in quelli di Laguerre riscriviamo i prodotti scalari tra quest'ultimi utilizzando la trasformazione $x = t^2$:

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \int_{-\infty}^\infty L_n^{(\alpha)}(t^2) L_m^{(\alpha)}(t^2) |t|^{2\alpha+1} e^{-t^2} dt, \quad (\text{III.85})$$

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \int_{-\infty}^\infty t L_n^{(\alpha)}(t^2) t L_m^{(\alpha)}(t^2) |t|^{2\alpha-1} e^{-t^2} dt. \quad (\text{III.86})$$

Per fare scomparire i fattori $|t|^{2\alpha\pm 1}$ in (III.85) e (III.86) scegliamo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (III.85) e $\alpha = \frac{1}{2}$ in (III.86). Quindi $H_{2n}(t)$ è proporzionale a $L_n^{(-\frac{1}{2})}(t^2)$ e $H_{2n+1}(t)$ è proporzionale a $tL_n^{(\frac{1}{2})}(t^2)$. Confrontando i coefficienti principali otteniamo

$$H_{2n}(t) = 2^{2n} n! (-1)^n L_n^{(-\frac{1}{2})}(t^2), \quad (\text{III.87})$$

$$H_{2n+1}(t) = 2^{2n+1} n! (-1)^n t L_n^{(\frac{1}{2})}(t^2). \quad (\text{III.88})$$

6 Polinomi di Chebyshev

I polinomi di Chebyshev di prima specie $T_n(x)$ e di seconda specie $U_n(x)$ si definiscono nel seguente modo:

$$T_n(x) = \cos(nt), \quad U_n(x) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin t}, \quad (\text{III.89})$$

where $x = \cos(t)$. In tal caso $T_n(x)$ e $U_n(x)$ sono polinomi di x di grado n che hanno le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, & T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= 2xT_n(x), \\ U_0(x) &= 1, & U_1(x) &= 2x, & U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) &= 2xU_n(x). \end{aligned}$$

La formula di ricorrenza è facile da verificare:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) \\ &= 2 \cos(t) \cos(nt) = 2xT_n(x), \\ U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) &= \frac{\sin((n+2)t)}{\sin(t)} + \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \\ &= \frac{2 \cos(t) \sin((n+1)t)}{\sin(t)} = 2xU_n(x). \end{aligned}$$

Si vede subito che $-1 \leq T_n(x) \leq +1$ per $x \in [-1, 1]$, mentre $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$ e $U_n(x) = 2^n x^n + \dots$ per $n \in \mathbb{N}$. In Fig. III.6 abbiamo tracciato i grafici di $T_n(x)$ e $U_n(x)$ per $n = 1, 2, 3, 4$.

Sono verificate le relazioni di ortogonalità

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(nt) \cos(mt) dt &= \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{n,0}) \delta_{n,m}, \\ \int_0^\pi \sin((n+1)t) \sin(m+1)t dt &= \frac{\pi}{2} \delta_{n,m}. \end{aligned}$$

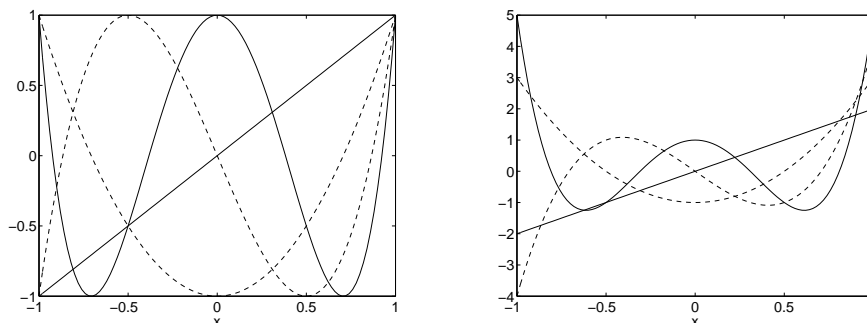


Figura III.6: I polinomi di Chebyshev di prima e seconda specie di grado 1, 2, 3 e 4. Nel pannello sinistro si trovano i grafici dei polinomi di Chebyshev di prima specie e nel pannello destro quelli di seconda specie. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio. Inoltre, i polinomi di Chebyshev specie hanno ± 1 come i loro valori estremi.

Sostituendo $x = \cos(t)$ otteniamo

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}(1 + \delta_{n,0})\delta_{n,m}, \quad (\text{III.90})$$

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}. \quad (\text{III.91})$$

Quindi $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sono i polinomi ortogonali su $[-1, 1]$ con peso $(1-x^2)^{-1/2}$ e $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sono i polinomi ortogonali su $[-1, 1]$ con peso $(1-x^2)^{1/2}$, tranne per fattori costanti.

Le funzioni $u(t) = \cos(nt)$ e $u(t) = \sin(nt)$ soddisfano all'equazione differenziale $u''(t) + n^2u(t) = 0$. Sostituendo $x = \cos(t)$ e utilizzando le definizioni per $T_n(x)$ e $U_n(x)$ otteniamo

$$\begin{aligned} (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) &= 0, \\ (1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n^2U_n(x) &= 0. \end{aligned}$$

In forma Sturm-Liouville abbiamo

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2)^{1/2} T_n'(x) \right) = -n^2 \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2)^{3/2} U_n'(x) \right) = -n^2 \sqrt{1-x^2} U_n(x).$$

Capitolo IV

PROBLEMI DI STURM-LIOUVILLE

0 Introduzione

In questo capitolo vengono studiati alcuni problemi al contorno per le equazioni di tipo ellittico, in particolare le equazioni di Laplace, di Poisson, delle onde e di Schrödinger nello spazio e nel piano. La separazione delle variabili in tali equazioni conduce spesso a certe equazioni differenziali ordinarie in un intervallo della retta di tipo Sturm-Liouville, in particolare le equazioni di Bessel e di Legendre.

Se non si fanno esplicite riserve, la regione G è supposta limitata e la sua frontiera S regolare a tratti. Nel caso unidimensionale abbiamo $G = (a, b)$, dove $a, b \in \mathbb{R}$.

1 Problemi agli autovalori

1.1 Impostazione del problema agli autovalori

Consideriamo il seguente problema al contorno omogeneo lineare per un'equazione di tipo ellittico:

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u, \quad x \in G, \quad (\text{IV.1})$$

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_S = 0. \quad (\text{IV.2})$$

Supponiamo che

$$\begin{cases} p \in C^1(\overline{G}), & q \in C(\overline{G}); & p(x) > 0, & q(x) \in \mathbb{R}, & x \in \overline{G}, \\ \alpha \in C(S), & \beta \in C(S), \\ \alpha(x) \geq 0, & \beta(x) \geq 0, & \alpha(x) + \beta(x) > 0, & x \in S. \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Sia $S_0 = \{x \in S : \min(\alpha(x), \beta(x)) > 0\}$. In alcuni casi supponiamo inoltre che $q(x) \geq 0$ per $x \in \overline{G}$. Notiamo i seguenti casi particolari:

$$\begin{cases} \alpha(x) \equiv 1, \beta(x) \equiv 0, & \text{quindi } u = 0, \ x \in S, & [\text{problema di Dirichlet}] \\ \alpha(x) \equiv 0, \beta(x) \equiv 1, & \text{quindi } \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \ x \in S, & [\text{problema di Neumann}]. \end{cases}$$

Il problema (IV.1)-(IV.2) consiste nel trovare una funzione $u(x)$ di classe $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ che soddisfi l'equazione (IV.1) in G e la condizione (IV.2) sulla frontiera S . Evidentemente, il problema (IV.1)-(IV.2) ha sempre la soluzione nulla, e questa soluzione non ha alcun interesse. Perciò il problema (IV.1)-(IV.2) deve essere considerato come un problema agli autovalori per l'operatore

$$L = -\text{div}(p \text{grad}) + q.$$

Tutte le funzioni f di classe $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ che soddisfano la condizione al contorno (IV.2) e la condizione $Lf \in L_2(G)$ costituiscono il dominio \mathcal{M}_L dell'operatore L . Siccome lo spazio vettoriale $\mathcal{D}(G)$ di tutte le funzioni di classe $C^\infty(G)$ di supporto compatto (cioè, che si annullano fuori di un compatto contenuto in G) è denso in $L_2(G)$ ed è contenuto in \mathcal{M}_L , \mathcal{M}_L è denso in $L_2(G)$.

In generale, il dominio \mathcal{M}_L di L non è abbastanza grande per trovare tutte le autofunzioni. Per questa ragione bisogna estendere l'operatore L ad un dominio abbastanza grande per contenere le autofunzioni.

1.2 Formule di Green

Se $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ e $v \in C^1(\overline{G})$, è valida la *prima formula di Green*:

$$\int_G v Lu \, dx = \int_G p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx - \int_S pv \frac{\partial u}{\partial n} \, dS + \int_G quv \, dx. \quad (\text{IV.4})$$

Per dimostrare la formula (IV.4) prendiamo una regione arbitraria G' con frontiera S' una superficie regolare a tratti tale che $\overline{G'} \subset G$. Visto che $u \in C^2(G)$, si ha anche $u \in C^2(\overline{G'})$ e, di conseguenza,

$$\begin{aligned} \int_{G'} v Lu \, dx &= \int_{G'} v [-\text{div}(p \text{grad } u) + qu] \, dx \\ &= - \int_{G'} \text{div}(pv \text{grad } u) \, dx + \int_{G'} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx + \int_{G'} quv \, dx. \end{aligned}$$

Utilizzando il teorema della divergenza (di Gauss) si ottiene

$$\int_{G'} v Lu dx = \int_{G'} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_{S'} pv \frac{\partial u}{\partial n'} dS' + \int_{G'} quv dx,$$

dove S' è la frontiera di G' . Facendo tendere G' a G nell'uguaglianza ottenuta ed utilizzando il fatto che $u, v \in C^1(\overline{G})$, concludiamo che il limite del secondo membro esiste. Quindi esiste anche il limite del primo membro ed è valida l'uguaglianza (IV.4). In tal caso l'integrale del primo membro della (IV.4) deve essere considerato improprio. I limiti non dipendono della maniera in cui G' tende a G , poichè gli integrali nelle parte a destra della (IV.4) sono assolutamente convergenti.

Se $u, v \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, è valida la *seconda formula di Green*:

$$\int_G (v Lu - u Lv) dx = \int_S p \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{IV.5})$$

Per dimostrare la formula (IV.5), scambiamo u e v nella (IV.4):

$$\int_G u Lv dx = \int_G p \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_S pu \frac{\partial v}{\partial n} dS + \int_G qvu dx, \quad (\text{IV.6})$$

e sottraiamo l'uguaglianza ottenuta della (IV.6). Come risultato, si ottiene la seconda formula di Green (IV.5).

In particolare per $p(x) \equiv 1$ e $q(x) \equiv 0$, le formule (IV.4) e (IV.5) di Green si trasformano nelle seguenti uguaglianze:

$$\int_G v \Delta u dx = \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} - \int_G \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad (\text{IV.7})$$

$$\int_G (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{IV.8})$$

1.3 Proprietà dell'operatore L

L'operatore L è hermitiano:

$$(Lf, g) = (f, Lg), \quad f, g \in \mathcal{M}_L. \quad (\text{IV.9})$$

Infatti, visto che $f, \bar{g} \in \mathcal{M}_L$, si ha $Lf \in L_2(G)$ e $L\bar{g} = \overline{Lg} \in L_2(G)$. In tal caso la seconda formula di Green (IV.5), per $u = f$ e $v = \bar{g}$, assume la forma

$$(Lf, g) - (f, Lg) = \int_G (\bar{g} Lf - f \overline{Lg}) dx = \int_S p \left(f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{IV.10})$$

Inoltre, le funzioni f e \bar{g} soddisfano le condizioni al contorno (IV.2):

$$\left(\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial n}\right)\Big|_S = 0, \quad \left(\alpha \bar{g} + \beta \frac{\partial \bar{g}}{\partial n}\right)\Big|_S = 0. \quad (\text{IV.11})$$

Per l'ipotesi (IV.3), $\alpha(x) + \beta(x) > 0$ per $x \in S$. Perciò per ogni $x \in S$ il sistema omogeneo di equazioni algebriche lineari (IV.11) ha una soluzione non nulla $(\alpha(x), \beta(x))$ e quindi il suo determinante si annulla, cioè

$$\det \begin{bmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \bar{g} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} \end{bmatrix} = \left(f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial n}\right)\Big|_S = 0.$$

Tenendo conto dell'uguaglianza ottenuta, dalla formula (IV.10) otteniamo l'uguaglianza (IV.9), la quale significa che l'operatore L è hermitiano.

Sia $f \in \mathcal{M}_L$. Ponendo $u = f$ e $v = \bar{f}$ nella prima formula di Green (IV.4) e tenendo conto del fatto che $f \in L_2(G)$, si ottiene

$$(Lf, f) = \int_G p |\text{grad } f|^2 dx - \int_S pf \frac{\partial \bar{f}}{\partial n} dS + \int_G q |f|^2 dx. \quad (\text{IV.12})$$

Dalla condizione al contorno (IV.2) segue che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta} f, & \beta(x) > 0, \quad x \in S; \\ f = 0, & \beta(x) = 0, \quad x \in S. \end{cases}$$

Sostituendo queste relazioni nell'uguaglianza (IV.12), si ottiene l'espressione per la forma quadratica

$$(Lf, f) = \int_G (p |\text{grad } f|^2 + q |f|^2) dx + \int_{S_0} p \frac{\alpha}{\beta} |f|^2 dS, \quad f \in \mathcal{M}_L, \quad (\text{IV.13})$$

dove S_0 è la parte di S per cui $\min(\alpha(x), \beta(x)) > 0$. La forma quadratica (Lf, f) , $f \in \mathcal{M}_L$, è detta *integrale d'energia*.

In virtù delle ipotesi (IV.3) più l'ipotesi che $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \bar{G}$, nel secondo membro della (IV.13), tutti e tre termini sono non negativi. Per questa ragione eliminando il secondo ed il terzo termine e stimando per difetto il primo termine, otteniamo la disuguaglianza

$$(Lf, f) \geq \int_G p |\text{grad } f|^2 dx \geq \min_{x \in \bar{G}} p(x) \int_G |\text{grad } f|^2 dx,$$

cioè

$$(Lf, f) \geq p_0 \| |\text{grad } f| \|^2_2, \quad f \in \mathcal{M}_L, \quad (\text{IV.14})$$

dove $p_0 = \min_{x \in \overline{G}} p(x)$; in virtù del fatto che la funzione p è continua e positiva su \overline{G} , si ha $p_0 > 0$.

Dalla disuguaglianza (IV.14) segue che l'operatore L è positivo se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \overline{G}$, cioè in tal caso

$$(Lf, f) \geq 0, \quad f \in \mathcal{M}_L. \quad (\text{IV.15})$$

Prima bisogna estendere il dominio dell'operatore hermitiano L . Per quello ci vuole una teoria sugli operatori lineari autoaggiunti non limitati su uno spazio di Hilbert.

Sia H uno spazio di Hilbert complesso e sia T un operatore lineare con dominio $D(T)$ in H . Allora T si dice *chiuso* se per ogni successione $\{x_n\}$ in $D(T)$ tale che $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ per opportuni $x, y \in H$, si ha $x \in D(T)$ e $Tx = y$. Allora T è un operatore chiuso se e solo se il grafico $G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$ è un insieme chiuso in $H \oplus H$ (con norma $\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$).¹

Teorema IV.1 [Teorema del grafico chiuso] *Sia T un operatore lineare chiuso definito su uno spazio di Hilbert H . Allora T è limitato.*

Ora definiamo gli operatori autoaggiunti. Siano H uno spazio di Hilbert complesso e T un operatore lineare con dominio $D(T)$ denso in H . Allora T si dice *hermitiano* [oppure *simmetrico*] se $(Tx, y) = (x, Ty)$ per ogni $x, y \in D(T)$. Per un operatore hermitiano T , definiamo l'operatore T^* da

$$\begin{cases} D(T^*) = \{y \in H : \exists c = c(y) > 0 : |(Tx, y)| \leq c(y)\|x\|, x \in D(T)\}, \\ \text{In tal caso } \exists! z \in H : (Tx, y) = (x, z); \text{ Poniamo } T^*y = z. \end{cases}$$

Un operatore lineare T si dice *autoaggiunto* se $D(T)$ è denso in H , T è hermitiano e $T^* = T$. Quindi T è autoaggiunto se T è hermitiano e il suo dominio è denso e soddisfa

$$D(T) = \{y \in H : \exists c = c(y) > 0 : |(Tx, y)| \leq c(y)\|x\|, x \in D(T)\}.$$

¹Per dimostrarlo, sia T chiuso e sia $\{(x_n, Tx_n)\}$ una successione in $G(T)$ tale che $\|(x_n, Tx_n) - (x, y)\| \rightarrow 0$ per qualche $(x, y) \in H \oplus H$. In tal caso $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ e, in virtù del fatto che T è chiuso, risultano $x \in D(T)$ e $Tx = y$; quindi $(x, y) \in D(T)$. D'altra parte, se $G(T)$ è chiuso in $H \oplus H$, sia $\{x_n\}$ una successione in $D(T)$ tale che $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ per opportuni $x, y \in H$. In tal caso $\{(x_n, Tx_n)\}$ è una successione in $G(T)$ tale che $\|(x_n, Tx_n) - (x, y)\| \rightarrow 0$. Siccome $G(T)$ è chiuso, risulta $(x, y) \in G(T)$, e quindi $x \in D(T)$ e $Tx = y$.

Si vede facilmente che un operatore autoaggiunto è chiuso. Infatti, sia $\{x_n\}$ una successione in $D(T)$ tale che $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ e $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$ per opportuni $x, y \in H$. Prendendo il limite se $n \rightarrow +\infty$ nell'uguaglianza $(Tz, x_n) = (z, Tx_n)$ valida per ogni $z \in D(T)$, risulta $(Tz, x) = (z, y)$ e quindi $|(Tz, x)| \leq \|y\| \|z\|$ per ogni $z \in D(T)$. Di conseguenza, $x \in D(T)$ e $Tx = y$, così dimostrando il fatto che T è chiuso.

Ritorniamo adesso all'operatore di Sturm-Liouville L con dominio \mathcal{M}_L . Allora L è hermitiano su $L_2(G)$ con dominio denso in $L_2(G)$. Sotto opportune condizioni che non specificheremo,² esiste un'estensione autoaggiunta unica \bar{L} dell'operatore L . Le autofunzioni del problema al contorno (IV.1)-(IV.2) si cercano nel dominio $D(\bar{L})$.

Ritorniamo adesso agli autovalori e autofunzioni dell'operatore L . Infatti bisogna discutere gli autovalori e le autofunzioni dell'estensione autoaggiunta \bar{L} . In altre parole, essi dipendono dalle condizioni al contorno (IV.2), ma le autofunzioni non potrebbero appartenere al dominio \mathcal{M}_L ma invece al dominio dell'estensione autoaggiunta \bar{L} .

Proposizione IV.2 *Abbiamo le seguenti proprietà:*

- a) *Tutti gli autovalori sono reali. Se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$, gli autovalori sono non negativi.*
- b) *Le autofunzioni corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali tra loro.*
- c) *Le autofunzioni possono essere scelte reali.*
- d) *Sia $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$. Affinchè $\lambda = 0$ è necessario e sufficiente che $q(x) \equiv 0$ ed $\alpha(x) \equiv 0$. In tal caso $\lambda = 0$ è un autovalore semplice e l'autofunzione è costante.*

Dimostrazione. Per dimostrare la parte (a), sia $f \in D(\bar{L})$ tale che $\bar{L}f = \lambda f$ e $f \neq 0$. Allora $(\lambda - \bar{\lambda})\|f\|_2 = (\bar{L}f, f) - (f, \bar{L}f) = 0$, e quindi $\lambda = \bar{\lambda}$ è reale. Inoltre, se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in S$, dalla (IV.13) segue che $(\bar{L}f, f) \geq 0$.

Per dimostrare la parte (b), consideriamo $f, g \in D(\bar{L})$ non banali tali che $\bar{L}f = \lambda f$ e $\bar{L}g = \mu g$; in tal caso $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si controlla facilmente che $(\lambda - \mu)(f, g) = (\bar{L}f, g) - (f, \bar{L}g) = 0$ e quindi $\lambda = \mu$ oppure $(f, g) = 0$.

Per dimostrare la parte (c), se f è un'autofunzione, il fatto che il corrispondente autovalore è reale implica che anche \bar{f} è una autofunzione. Siccome

²Certamente per $\alpha, \beta \geq 0$ costanti con $\alpha + \beta > 0$ e S regolare.

le parti reale ed immaginaria della f non si possono ambedue annullare quasi ovunque, almeno una di loro è un'autofunzione reale.

Infine, per dimostrare la parte (d), sia $\lambda = 0$ un autovalore con corrispondente autofunzione f , mentre $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in G$. Allora dalla (IV.13) segue $p|\text{grad } f|^2 \equiv 0$ e quindi $[p(x) > 0 \text{ sempre}] f$ è costante e $qf \equiv 0$.³ Se f fosse non nulla, ne seguirebbe $q(x) = 0$ per ogni $x \in G$ e $\alpha(x) \equiv 0$ per ogni $x \in S_0$. Quindi $\alpha \equiv 0$ e $q \equiv 0$. \square

2 Problema di Sturm-Liouville

Nel caso unidimensionale ($n = 1$, $G = (0, \ell)$, $S = \{0, \ell\}$) il problema al contorno (IV.1)-(IV.2) è detto *problema di Sturm-Liouville*. Ha la forma

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = \lambda u, \quad 0 < x < \ell, \quad (\text{IV.16})$$

$$h_1u(0) - h_2u'(0) = 0, \quad H_1u(\ell) + H_2u'(\ell) = 0, \quad (\text{IV.17})$$

dove h_1, h_2, H_1, H_2 sono costanti non negative tali che $h_1 + h_2 > 0$ e $H_1 + H_2 > 0$. Assumiamo che $p \in C^1[0, \ell]$, $p(x) > 0$ per ogni $x \in [0, \ell]$, e $q \in C[0, \ell]$ è reale. Come dominio dell'operatore L prendiamo

$$\mathcal{M}_L = \left\{ u \in C^2(0, \ell) \cap C^1[0, \ell] : \begin{array}{l} u'' \in L_2(0, \ell) \\ h_1u(0) - h_2u'(0) = 0 \\ H_1u(\ell) + H_2u'(\ell) = 0 \end{array} \right\}.$$

Se $h_2 = H_2 = 0$ (cioè $u(0) = u(\ell) = 0$), abbiamo le *condizioni di Dirichlet*. Se $h_1 = H_1 = 0$ (cioè $u'(0) = u'(\ell)$), stiamo parlando delle *condizioni di Neumann*. Gli altri casi si dicono *condizioni miste* oppure *condizioni di Robin*.

L'operatore L è hermitiano, cioè $(Lf, g) = (f, Lg)$ per ogni $f, g \in \mathcal{M}_L$. Inoltre esiste un'unica estensione autoaggiunta \bar{L} di L . Le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville si cercano nel dominio di \bar{L} (e non necessariamente in \mathcal{M}_L).

L'espressione (IV.13) per l'integrale d'energia assume la seguente forma:

$$(Lf, f) = \int_0^\ell (p|f'|^2 + q|f|^2) dx + \frac{h_1}{h_2}p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2}p(\ell)|f(\ell)|^2, \quad f \in \mathcal{M}_L,$$

dove gli ultimi termini del secondo membro si annullano per $h_2 = 0$ o per $H_2 = 0$, rispettivamente. Se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, \ell]$, l'integrale d'energia (Lf, f) è non negativo per ogni $f \in \mathcal{M}_L$. In particolare, se $q(x) \geq 0$ per $x \in [0, \ell]$, $\lambda = 0$ è autovalore del problema (IV.16)-(IV.17) e f è la corrispondente autofunzione, si ottiene $f' \equiv 0$,⁴ e quindi f è costante; affinché la funzione f sia non banale, ci vogliono le condizioni di Neumann $u'(0) = u'(\ell) = 0$.

³Questo ne segue se $f \in \mathcal{M}_L$.

⁴Tra poco dimostreremo che l'autofunzione $f \in \mathcal{M}_L$ invece di $f \in D(\bar{L})$.

2.1 Funzione di Green

Supponiamo che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L . Consideriamo il problema al contorno

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = f(x), \quad 0 < x < \ell, \quad (\text{IV.18})$$

$$h_1u(0) - h_2u'(0) = 0, \quad H_1u(\ell) + H_2u'(\ell) = 0, \quad (\text{IV.19})$$

dove $f \in C[0, \ell] \cap L_2(0, \ell)$. Dato che $\lambda = 0$ non è autovalore dell'operatore L , la soluzione del problema al contorno (IV.18)-(IV.19) nella classe \mathcal{M}_L (e anche nella classe $D(\bar{L})$) è unica. Costruiamo la soluzione di questo problema.

Siano v_1 e v_2 soluzioni non nulle (reali) dell'equazione omogenea $Lv = 0$ che soddisfano le condizioni

$$h_1v_1(0) - h_2v_1'(0) = 0, \quad H_1v_2(\ell) + H_2v_2'(\ell) = 0. \quad (\text{IV.20})$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie segue che queste soluzioni esistono ed appartengono alla classe $C^2[0, \ell]$. Le soluzioni lineari v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. Infatti, in caso contrario $v_1(x) = cv_2(x)$ per qualche $0 \neq c \in \mathbb{R}$ e, di conseguenza, in base alla (IV.20) la soluzione v_1 soddisfa anche la seconda condizione al contorno (IV.19). Ciò significa che v_1 è un'autofunzione dell'operatore L corrispondente all'autovalore $\lambda = 0$, contrariamente all'ipotesi; inoltre segue che in tal caso $v_1 \in \mathcal{M}_L$. Perciò il determinante Wronskiano vale

$$w(x) = \det \begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \neq 0, \quad x \in [0, \ell].$$

Siccome $(pw)'(x) \equiv 0$, risulta l'identità

$$p(x)w(x) \equiv p(0)w(0), \quad x \in [0, \ell]. \quad (\text{IV.21})$$

Cercheremo la soluzione del problema (IV.18)-(IV.19) per mezzo del metodo della variazione delle costanti,

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x). \quad (\text{IV.22})$$

Allora $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ soddisfano il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f(x)/p(x) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

con determinante $w(x) \neq 0$. Risolvendo questo sistema ed utilizzando l'identità (IV.21), si ottiene

$$c_1'(x) = \frac{f(x)v_2(x)}{p(0)w(0)}, \quad c_2'(x) = -\frac{f(x)v_1(x)}{p(0)w(0)}. \quad (\text{IV.24})$$

Per soddisfare le condizioni al contorno (IV.19), osserviamo che esistono due costanti d'integrazione c_1 e c_2 tali che

$$u(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) - \frac{v_1(x)}{p(0)w(0)} \int_x^\ell f(y) v_2(y) dy - \frac{v_2(x)}{p(0)w(0)} \int_0^x f(y) v_1(y) dy.$$

Calcolando la derivata si trova

$$\begin{aligned} u'(x) &= c_1 v_1'(x) + c_2 v_2'(x) - \frac{v_1'(x)}{p(0)w(0)} \int_x^\ell f(y) v_2(y) dy \\ &\quad - \frac{v_2'(x)}{p(0)w(0)} \int_0^x f(y) v_1(y) dy. \end{aligned}$$

Tenendo conto dalle condizioni (IV.20), otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= h_1 u(0) - h_2 u'(0) = c_2 [h_1 v_2(0) - h_2 v_2'(0)]; \\ 0 &= H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = c_1 [H_1 v_1(\ell) + H_2 v_1'(\ell)], \end{aligned}$$

e quindi, in virtù del fatto che le espressioni tra parentesi quadrate non si annullano, troviamo $c_1 = c_2 = 0$. In altre parole,

$$u(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y) f(y) dy, \quad (\text{IV.25})$$

dove

$$\mathcal{G}(x, y) = -\frac{1}{p(0)w(0)} \begin{cases} v_1(x)v_2(y), & 0 \leq x < y \leq \ell, \\ v_2(x)v_1(y), & 0 \leq y < x \leq \ell. \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

La funzione $\mathcal{G}(x, y)$ è detta *funzione di Green* del problema al contorno (IV.18)-(IV.19) o dell'operatore L . Questo nucleo è reale, simmetrico e continuo. Inoltre, vale l'uguaglianza

$$\frac{\partial \mathcal{G}(y+0, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{G}(y-0, y)}{\partial x} = -\frac{w(y)}{p(0)w(0)} = -\frac{1}{p(y)}, \quad y \in (0, \ell). \quad (\text{IV.27})$$

Consideriamo l'operatore integrale G su $L_2(0, \ell)$ con nucleo $\mathcal{G}(x, y)$. Allora questo nucleo è reale, simmetrico e continuo. Dunque G è un operatore lineare autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $L_2(0, \ell)$. Siccome $u = Gf$ appartiene ad \mathcal{M}_L per ogni $f \in C(0, \ell) \cap L_2(0, \ell)$, il dominio \mathcal{M}_L è strettamente contenuto nell'immagine dell'operatore integrale G . Ne segue facilmente che l'immagine di G (cioè, $\{Gf : f \in L_2(0, \ell)\}$) coincide con il dominio dell'estensione autoaggiunta \bar{L} di L , Infatti, $\bar{L} = G^{-1}$.

Nel caso in cui $\lambda = 0$ è autovalore del problema (IV.18)-(IV.19), bisogna scegliere qualche $\mu \in \mathbb{R}$ che non è autovalore, e riscrivere (IV.18)-(IV.19) nella forma equivalente

$$(L - \mu I)u \equiv -(pu')' + (q - \mu)u = f(x) - \mu u(x), \quad 0 < x < \ell, \quad (\text{IV.28})$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \quad (\text{IV.29})$$

Partendo dalle due soluzioni v_1 e v_2 dell'equazione omogenea $(L - \mu)u = 0$ che soddisfano le condizioni (IV.20) e quindi sono linearmente indipendenti, arriviamo ad una funzione di Green $\mathcal{G}(x, y; \mu)$ ed un operatore integrale $G(\mu)$ dipendente di μ tali che

$$u = G(\mu) [f - \mu u].$$

Quest'ultima si può scrivere nella forma dell'equazione integrale di Fredholm

$$u(x) + \mu \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y; \mu) u(y) dy = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y; \mu) f(y) dy, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (\text{IV.30})$$

Il dominio dell'estensione autoaggiunta \bar{L} di L [o di $L - \mu I$] coincide con l'immagine dell'operatore integrale $G(\mu)$.

Esempio IV.3 Consideriamo il problema di Sturm-Liouville

$$-u'' = f(x), \quad h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0.$$

Le soluzioni v_1 e v_2 dell'equazione omogenea $-u'' = 0$ che soddisfano le condizioni (IV.20), hanno la forma (tranne un fattore costante)

$$v_1(x) = h_1 x + h_2, \quad v_2(x) = H_1 \ell + H_2 - H_1 x,$$

e quindi $w(x) = -h_1(H_1 \ell + H_2) - h_2 H_1$ si annulla se e solo se $h_1 = H_1 = 0$ (cioè, condizioni di Neumann in ambedue gli estremi). Se $h_1 + H_1 > 0$, si trova per la funzione di Green

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{h_1(H_1 \ell + H_2) + h_2 H_1} [h_1 x + h_2] [H_1(\ell - y) + H_2], & 0 \leq x < y \leq \ell, \\ \frac{1}{h_1(H_1 \ell + H_2) + h_2 H_1} [H_1(\ell - x) + H_2] [h_1 y + h_2], & 0 \leq y < x \leq \ell. \end{cases}$$

Per trovare gli autovalori, cerchiamo le soluzioni $v_1(x, \lambda)$ e $v_2(x, \lambda)$ dell'equazione omogenea $-u'' = \lambda u$ che soddisfano le condizioni (IV.20), mentre $\lambda > 0$. Otteniamo

$$\begin{aligned} v_1(x, \lambda) &= h_2 \sqrt{\lambda} \cos(x\sqrt{\lambda}) + h_1 \sin(x\sqrt{\lambda}); \\ v_2(x, \lambda) &= H_2 \sqrt{\lambda} \cos((\ell - x)\sqrt{\lambda}) + H_1 \sin((\ell - x)\sqrt{\lambda}), \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} w(x) &= v_1(0, \lambda)v_2'(0, \lambda) - v_1'(0, \lambda)v_2(0, \lambda) \\ &= \sqrt{\lambda} \left[(h_2H_2\lambda - h_1H_1) \sin(\ell\sqrt{\lambda}) - (h_2H_1 + h_1H_2) \sqrt{\lambda} \cos(\ell\sqrt{\lambda}) \right]. \end{aligned}$$

Un numero $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se $w(x) \equiv 0$. Sotto le condizioni di Dirichlet ($h_2 = H_2 = 0$) e sotto quelle di Neumann ($h_1 = H_1 = 0$) segue

$$\sin(\ell\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Quindi gli autovalori e le autofunzioni sono

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad \begin{cases} n = 1, 2, 3, \dots, & u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad [\text{Dirichlet}] \\ n = 0, 1, 2, \dots, & u_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right). \quad [\text{Neumann}] \end{cases}$$

Sotto le altre condizioni (cioè, se $h_2H_1 + h_1H_2 > 0$), $\lambda = 0$ non è mai autovalore e $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se è una radice positiva dell'equazione trascendente⁵

$$\cotg(\ell\sqrt{\lambda}) = \frac{h_2H_2\lambda - h_1H_1}{(h_2H_1 + h_1H_2)\sqrt{\lambda}}.$$

C'è un numero infinito di tali radici (infatti, una successione crescente λ_n che tende a $+\infty$) ed ogni radice corrispondente all'autofunzione

$$u_n(x, \lambda) = h_2\sqrt{\lambda_n} \cos(x\sqrt{\lambda_n}) + h_1 \sin(x\sqrt{\lambda_n}).$$

Le radici $\sqrt{\lambda_n}$ si trovano più facilmente nel modo grafico. Non ci sono autovalori fuori dell'intervallo $[0, +\infty)$.

2.2 Riduzione ad un'equazione integrale

Facciamo vedere che il problema di Sturm-Liouville può essere ridotto ad un'equazione integrale di Fredholm con nucleo reale, simmetrico e continuo $\mathcal{G}(x, y)$.

Teorema IV.4 *Il problema al contorno*

$$Lu = \lambda u + f, \quad u \in D(\bar{L}), \quad f \in C(0, \ell) \cap L_2(0, \ell), \quad (\text{IV.31})$$

⁵Ponendo $x = \sqrt{\lambda}$, $\alpha = h_2H_1 + h_1H_2 > 0$, $\beta = h_2H_2 \geq 0$ e $\gamma = h_1H_1 \geq 0$ con $\beta + \gamma > 0$, si vede subito che i grafici di $(\alpha x)/(\beta x^2 - \gamma)$ e $\text{tg}(\ell x)$ hanno un numero infinito di punti di intersezione $x > 0$.

con la condizione che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)u(y) dy + \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)f(y) dy, \quad u \in L_2(0, \ell), \quad (\text{IV.32})$$

dove $\mathcal{G}(x, y)$ è la funzione di Green dell'operatore L . Inoltre, le soluzioni u dei problemi equivalenti (IV.31) e (IV.32) appartengono ad \mathcal{M}_L .

Dimostrazione. Se $u(x)$ è una soluzione del problema al contorno (IV.31), allora

$$u(x) = (G[\lambda u + f])(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)[\lambda u(y) + f(y)] dy, \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

cioè $u(x)$ soddisfa l'equazione integrale (IV.32).

Inversamente, supponiamo che la funzione $u_0 \in L_2(0, \ell)$ soddisfi l'equazione integrale (IV.32). Se G denota l'operatore integrale con nucleo $\mathcal{G}(x, y)$, allora $u_0 = G(\lambda u_0 + f) \in D(\bar{L})$ e $\bar{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. Dall'uguaglianza

$$u_0(x) = - \frac{v_1(x) \int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy + v_2(x) \int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy}{p(0)w(0)}$$

segue che $u_0 \in C[0, \ell]$, poichè le funzioni sotto il segno degli integrali appartengono ad $L_1(0, \ell)$. In tal caso segue dall'equazione precedente che $u_0 \in C^1[0, \ell]$ con derivata

$$u_0'(x) = - \frac{v_1'(x) \int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy + v_2'(x) \int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy}{p(0)w(0)}.$$

Da quell'ultima equazione segue che $u_0 \in C^2[0, \ell]$. Inoltre, dalla (IV.20) segue che $u_0(x)$ soddisfa le condizioni al contorno (IV.17). Dunque $u_0 \in \mathcal{M}_L$. Di conseguenza, $Lu_0 = \bar{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. \square

Applicando il teorema precedente al caso $f = 0$, concludiamo che ogni autofunzione dell'operatore L (in principio appartenente a $D(\bar{L})$) appartiene ad \mathcal{M}_L . Inoltre, tutte le autofunzioni appartengono a $C[0, \ell]$. Quindi il problema al contorno per $f = 0$ (cioè, il problema agli autovalori) è equivalente a quello agli autovalori dell'equazione integrale omogenea

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)u(y) dy \quad (\text{IV.33})$$

in $C[0, \ell]$ oppure in $L_2(0, \ell)$, a condizione che $\lambda = 0$ non sia autovalore dell'operatore L .

Eliminiamo ora l'ipotesi che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L . Per farlo, sia $\mu_0 \in \mathbb{R}$ un numero che non è un autovalore. Allora $\mu = 0$ non è un autovalore del problema di Sturm-Liouville

$$L_1 u \equiv -(pu')' + (q - \mu_0)u = \mu u, \quad (\text{IV.34})$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \quad (\text{IV.35})$$

Ma $\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_{L_1}$ e $D(\bar{L}) = D(\bar{L}_1)$. Quindi il problema di Sturm-Liouville (IV.16)-(IV.17) è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = (\lambda - \mu_0) \int_0^\ell \mathcal{G}_1(x, y) u(y) dy, \quad (\text{IV.36})$$

dove $\mathcal{G}_1(x, y)$ è la funzione di Green dell'operatore L_1 .

2.3 Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni

Abbiamo dunque stabilito l'equivalenza tra il problema di Sturm-Liouville omogeneo ed il problema agli autovalori per l'equazione integrale omogenea (IV.36) con nucleo integrale $\mathcal{G}_1(x, y)$ reale, simmetrico e continuo. Gli autovalori λ del problema (IV.16)-(IV.17) sono collegati ai numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$ con la relazione $\mu = \lambda - \mu_0$, mentre le corrispondenti autofunzioni coincidono. Quindi, per il problema di Sturm-Liouville sono validi tutti gli enunciati della teoria delle equazioni integrali con nucleo continuo, reale e simmetrico. In particolare⁶ *l'insieme degli autovalori $\{\lambda_k\}$ di questo problema non è vuoto e non ha punti di accumulazione finiti; gli autovalori sono reali e sono anche di molteplicità finita; le autofunzioni possono essere scelte reali ed ortonormali ed appartengono a $C^2[0, \ell]$.*

Il problema di Sturm-Liouville ha alcune proprietà specifiche.

- 1) *Gli autovalori appartengono all'intervallo $[q_{\min}, \infty)$ dove $q_{\min} = \min_{x \in [0, \ell]} q(x)$.*

Infatti, per $f \in \mathcal{M}_L$ si ha

$$\begin{aligned} (Lf, f) &= \int_0^\ell (p|f'|^2 + q|f|^2) dx + \frac{h_1}{h_2} p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2} p(\ell)|f(\ell)|^2 \\ &\geq q_{\min} \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

⁶Sfruttiamo il fatto che il corrispondente operatore integrale K è compatto e autoaggiunto su $L^2(G)$. Ciò si deve alla stima $\int_G \int_G |\mathcal{G}_1(x, y)|^2 dx dy < +\infty$.

dove gli ultimi termini del secondo membro si annullano per $h_2 = 0$ o per $H_2 = 0$, rispettivamente. Quindi, se λ è un autovalore di L con corrispondente autofunzione u , allora $u \in \mathcal{M}_L$ e $\lambda \|u\|_2^2 = (Lu, u) \geq q_{\min} \|u\|_2^2$, e dunque $\lambda \geq q_{\min}$.

- 2) *L'insieme degli autovalori è infinito numerabile.* Infatti, se quest'insieme fosse finito, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, il nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$ sarebbe degenerare:

$$\mathcal{G}_1(x, y) = \sum_{k=1}^N \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k + \mu_0}, \quad (\text{IV.37})$$

dove $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sono i corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate. Siccome $\varphi_k \in C^2[0, \ell]$, risulterebbe una contraddizione con la (IV.27):

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1(y+0, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{G}_1(y-0, y)}{\partial x} = 0, \quad y \in (0, \ell).$$

- 3) *Ogni autovalore è semplice.* Sia λ_0 un autovalore. Allora la corrispondente autofunzione u soddisfa $Lu = \lambda_0 u$ e le due condizioni al contorno (IV.20) [per $v_1 = v_2 = u$]. Ciascuna di queste condizioni definisce uno sottospazio di $L_2(0, \ell)$ di dimensione 1. Quindi l'autospazio corrispondente all'autovalore λ_0 è unidimensionale.

Le condizioni al contorno (IV.17) si dicono *separate*, poichè riguardano i valori e le derivate della u in estremi diversi dell'intervallo $(0, \ell)$. Più generalmente, per $u, v \in C^2[0, \ell]$ risulta dopo due integrazioni per parti:

$$(Lu, v) - (u, Lv) = [p(u\bar{v}' - u'\bar{v})]_0^\ell.$$

La parte a destra si annulla se u, v soddisfano le condizioni separate (IV.17). Purtroppo si annullano anche se consideriamo le condizioni non separate

$$\sqrt{p(0)} u(0) = \pm \sqrt{p(\ell)} u(\ell), \quad \sqrt{p(0)} u'(0) = \pm \sqrt{p(\ell)} u'(\ell),$$

per la u e per la v , dove bisogna scegliere il segno $+$ due volte oppure il segno meno due volte. In tal caso si può introdurre il dominio \mathcal{M}_L ed estenderlo ad un dominio su cui l'operatore differenziale L è autoaggiunto. Per esempio, consideriamo il problema di Sturm-Liouville con condizioni periodiche

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(\ell), \quad u'(0) = u'(\ell).$$

In tal caso gli autovalori e le autofunzioni sono:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{\ell}\right)^2, & n = 0, 1, 2, \dots \\ u_0 = 1, \quad u_n(x) = c_1 \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) + c_2 \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Tranne per l'autovalore $\lambda_0 = 0$, tutti gli autospazi hanno la dimensione 2. D'altra parte, per il problema di Sturm-Liouville con condizioni antiperiodiche

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = -u(\ell), \quad u'(0) = -u'(\ell),$$

gli autovalori e le autofunzioni sono:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{\ell} \right)^2, & n = 1, 2, 3, \dots \\ u_n(x) = c_1 \cos \left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell} \right) + c_2 \sin \left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell} \right), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

In questo caso tutti gli autospazi hanno la dimensione 2.

Siano $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ gli autovalori della L e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate. Siccome il problema agli autovalori è equivalente a quello per un'equazione integrale con nucleo continuo reale e simmetrico, il sistema delle autofunzioni è completo in $L_2(0, \ell)$. In altre parole, ogni funzione $f \in L_2(0, \ell)$ può essere sviluppata in una serie

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k, \quad (\text{IV.38})$$

dove

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\ell} \left| f(x) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k(x) \right|^2 dx = 0.$$

Esempio IV.5 Consideriamo il problema di Sturm-Liouville con condizioni periodiche

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(\ell), \quad u'(0) = u'(\ell).$$

Allora gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate sono:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \lambda_n^c = \lambda_n^s = \left(\frac{2n\pi}{\ell} \right)^2, \\ \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}, & \varphi_n^c(x) = \left(\frac{2}{\ell} \right)^{1/2} \cos \left(\frac{2n\pi x}{\ell} \right), \quad \varphi_n^s(x) = \left(\frac{2}{\ell} \right)^{1/2} \sin \left(\frac{2n\pi x}{\ell} \right), \end{cases}$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Per $f \in L_2(0, \ell)$ risulta la serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{2n\pi x}{\ell} \right) + b_n \sin \left(\frac{2n\pi x}{\ell} \right) \right),$$

dove

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

3 Problemi di Sturm-Liouville singolari

Finora ci siamo limitati ai problemi di Sturm-Liouville detti *regolari*. Ciò vuol dire che l'equazione differenziale ha la forma

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = \lambda u, \quad 0 < x < \ell, \quad (\text{IV.39})$$

dove $p \in C^1[0, \ell]$ è strettamente positiva (anche agli estremi dell'intervallo $[0, \ell]$) e $q \in C[0, \ell]$ è una funzione reale. Nelle applicazioni appaiono, purtroppo, problemi di Sturm-Liouville in cui la funzione p è positiva all'interno dell'intervallo $(0, \ell)$ e si annulla ad uno (o ambedue) degli estremi. Esistono anche applicazioni importanti in cui l'intervallo è illimitato. Tali problemi di Sturm-Liouville si dicono *singolari*.

La teoria dei problemi di Sturm-Liouville singolari è stata principalmente sviluppata da Weyl (1908). L'esistenza di uno zero della p all'estremo $x = 0$ implica l'impossibilità di convertire l'equazione differenziale in un'equazione della forma $y'' + \dots = 0$ con condizioni iniziali di tipo $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_1$. Ciò compromette in modo serio la costruzione della funzione di Green e la conversione del problema di Sturm-Liouville in un'equazione integrale con nucleo hermitiano. Un'altra difficoltà è la descrizione delle condizioni al contorno che conducono ad un operatore autoaggiunto e quindi ad una teoria spettrale. La terza difficoltà consiste nella possibilità dell'esistenza di spettro continuo. Ciò capita in particolare per l'equazione di Schrödinger radiale con potenziale che tende a zero se $|x| \rightarrow \infty$, per cui \mathbb{R}^+ è lo spettro continuo dell'operatore di Sturm-Liouville. Tutto quanto vuol dire che non c'è alcuna speranza di una teoria generale. Invece bisogna trattare le applicazioni in modo ad hoc.

Esempio IV.6 Sia $\nu \geq 0$. Consideriamo il problema al contorno

$$L_\nu u \equiv -(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda xu, \quad 0 < x < 1, \quad (\text{IV.40})$$

$$u(x) = O(x^\gamma), \quad x \rightarrow 0; \quad \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0, \quad (\text{IV.41})$$

dove $\gamma = \min(\nu, 1)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$. Sia \mathcal{M}_{L_ν} l'insieme di tutte le funzioni $u \in C^2((0, 1]) \cap L^2((0, 1); x dx)$ che soddisfano alle condizioni al contorno (IV.41) e la condizione $x^{1/2}L_\nu u \in L^2(0, 1)$. Quest'insieme è denso nello spazio di Hilbert $L^2((0, 1); x dx)$ in cui verrà studiato il problema al contorno.

Dimostriamo ora che l'operatore L_ν è positivo. Infatti, nel prodotto scalare di $L^2(0, 1)$ si ha per $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$

$$\begin{aligned} (L_\nu u, u) &= - \int_0^1 (xu')' \bar{u} dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx \\ &= \int_0^1 x|u'|^2 dx - [xu'\bar{u}]_{x=0}^1 + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx \\ &= \int_0^1 x|u'|^2 dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx + \frac{\alpha}{\beta} |u(1)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Di conseguenza, tutti gli autovalori dell'operatore L_ν sono non negativi. Affinchè $\lambda = 0$ sia autovalore dell'operatore L_ν , è necessario e sufficiente che $\nu = 0$ ed $\alpha = 0$ [condizione di Neumann all'estremo $x = 1$]; a quest'autovalore corrisponde l'autofunzione costante. Gli autovalori sono anche semplici. Discutiamo ora il caso $\lambda > 0$. In tal caso le uniche soluzioni della (IV.40) limitate per $x \rightarrow 0^+$ sono i multipli della funzione $J_\nu(x\sqrt{\lambda})$. Una tale soluzione soddisfa la condizione (IV.41) se e solo se

$$\alpha J_\nu(\sqrt{\lambda}) + \beta \sqrt{\lambda} J'_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

cioè, se e solo se $\mu = \sqrt{\lambda}$ è una radice dell'equazione (III.25). Enumerando questi zeri da $0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \dots$, otteniamo gli autovalori (soltanto quelli diversi da 0) $\lambda_k^{(\nu)} = [\mu_k^{(\nu)}]^2$ e le corrispondenti autofunzioni $J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x)$ ($k = 1, 2, \dots$). Per $\nu = \alpha = 0$ si aggiunga l'autovalore $\lambda_0^{(0)} = 0$ con la corrispondente autofunzione costante.

Per $\nu = 0$ le funzioni $v_1(x) = 1$ e $v_2(x) = \beta - \alpha \log(x)$ soddisfano all'equazione (IV.40) e, rispettivamente, alla prima e alla seconda condizione (IV.41). Quindi le soluzioni dell'equazione differenziale $L_0 u \equiv -(xu')' = xf(x)$ hanno la forma

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x), \quad (\text{IV.42})$$

dove

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = -f(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.43})$$

Sia $\alpha > 0$ (cioè, escludiamo la condizione di Neumann in $x = 1$). Dunque $c_1'(x) = [\log(x) - \frac{\beta}{\alpha}]xf(x)$ e $c_2'(x) = xf(x)/\alpha$. Quindi

$$c_1(x) = c_1 + \int_0^x \left[\log(y) - \frac{\beta}{\alpha} \right] yf(y) dy, \quad c_2(x) = c_2 - \frac{1}{\alpha} \int_x^1 yf(y) dy.$$

Siccome

$$u(x) = \left(-\alpha c_2 + \int_0^1 y f(y) dy \right) \log(x) + c_1 + \beta c_2 \\ + \int_0^x \left[\log(y) - \frac{\beta}{\alpha} \right] y f(y) dy - \frac{\beta}{\alpha} \int_x^1 y f(y) dy - (\log x) \int_0^x y f(y) dy,$$

si ha $c_2 = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 y f(y) dy$, e dunque

$$u(x) = c_1 + \int_0^x \left[\log(y) - \frac{\beta}{\alpha} \right] y f(y) dy - \left[\log(x) - \frac{\beta}{\alpha} \right] \int_0^x y f(y) dy.$$

La seconda condizione

$$0 = u(1) + \frac{\beta}{\alpha} u'(1) = c_1 + \int_0^1 \left[\log(y) - \frac{\beta}{\alpha} \right] y f(y) dy$$

ci dà la costante c_1 . Infine

$$u(x) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, y) f(y) y dy, \quad (\text{IV.44})$$

dove la funzione di Green

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{\beta}{\alpha} - \log \max(x, y) > 0.$$

Quindi il problema (IV.40)-(IV.41) è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) - \lambda \int_0^1 \mathcal{G}(x, y) u(y) y dy = \int_0^1 \mathcal{G}(x, y) f(y) y dy,$$

da risolvere nello spazio di Hilbert $L^2((0, 1); x dx)$.

Esempio IV.7 Consideriamo ora il problema al contorno

$$Lu \equiv -u'' + \mu^2 u = \lambda u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{IV.45})$$

su un intervallo illimitato, dove $\mu > 0$. Sia \mathcal{M}_L l'insieme di tutte le funzioni $u \in L^2(\mathbb{R})$ tali che la sua derivata seconda (distribuzionale) $u'' \in L^2(\mathbb{R})$. Allora $v_1(x) = e^{\mu x}$ e $v_2(x) = e^{-\mu x}$ soddisfano all'equazione $v_j'' + \mu^2 v_j = 0$ per $j = 1, 2$. Le soluzioni dell'equazione $Lu \equiv -u'' + \mu^2 u = f$ hanno tutte la forma

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x),$$

dove

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \end{pmatrix}.$$

Quindi $c_1'(x) = -e^{-\mu x} f(x)/2\mu$ e $c_2'(x) = e^{\mu x} f(x)/2\mu$. Di conseguenza,

$$c_1(x) = c_1 + \frac{1}{2\mu} \int_x^\infty e^{-\mu y} f(y) dy, \quad c_2(x) = c_2 + \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^x e^{\mu y} f(y) dy.$$

Dunque

$$u(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x} + \frac{1}{2\mu} \int_x^\infty e^{\mu(x-y)} f(y) dy + \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^x e^{-\mu(x-y)} f(y) dy. \quad (\text{IV.46})$$

Affinchè $u \in L^2(\mathbb{R})$, ci vuole $c_1 = c_2 = 0$. Quindi

$$u(x) = \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y) dy. \quad (\text{IV.47})$$

Si osservi che $\mathcal{G}(x, y) = e^{-\mu|x-y|}/2\mu$ prende il posto della funzione di Green.

Esempio IV.8 Consideriamo ora il problema al contorno

$$\begin{cases} Lu \equiv -u'' + \mu^2 u = \lambda u, & x \in \mathbb{R}^+, \\ u(0) = 0, & \text{Dirichlet,} \\ u'(0) = 0, & \text{Neumann,} \\ (\cos \alpha)u(0) - (\sin \alpha)u'(0) = 0, & \text{Condizione miste,} \end{cases} \quad (\text{IV.48})$$

su un intervallo illimitato, dove $\mu > 0$ e $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Sia \mathcal{M}_L l'insieme di tutte le funzioni $u \in L^2(\mathbb{R})$ tali che la sua derivata seconda⁷ $u'' \in L^2(\mathbb{R}^*)$ e $(\cos \alpha)u(0) = (\sin \alpha)u'(0)$. Seguendo il metodo dell'esempio precedente troviamo al posto della (IV.46)

$$u(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x} + \frac{1}{2\mu} \int_x^\infty e^{\mu(x-y)} f(y) dy + \frac{1}{2\mu} \int_0^x e^{-\mu(x-y)} f(y) dy. \quad (\text{IV.49})$$

Affinchè $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$, ci vuole $c_1 = 0$. Quindi

$$u(x) = c_2 e^{-\mu x} + \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y) dy. \quad (\text{IV.50})$$

⁷Si intende la derivata seconda distribuzionale.

Ora sostituiamo la condizione al contorno in $x = 0$. Il risultato finale è

$$\begin{aligned}
 & u(x) \\
 = & \begin{cases} \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y) dy - \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu(x+y)} f(y) dy, & \text{Dirichlet,} \\ \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y) dy + \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu(x+y)} f(y) dy, & \text{Neumann,} \\ \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y) dy + F(\mu, \alpha) \int_0^\infty e^{-\mu(x+y)} f(y) dy, & \text{miste,} \end{cases} \\
 & \hspace{20em} \text{(IV.51)}
 \end{aligned}$$

dove

$$F(\mu, \alpha) = \frac{\mu \sin \alpha - \cos \alpha}{2\mu[\mu \sin \alpha + \cos \alpha]}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(x, y) &= \frac{e^{-\mu|x-y|} + 2\mu F(\mu, \alpha) e^{-\mu(x+y)}}{2\mu} \\
 &= \frac{\mu \sin \alpha}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} \mathcal{G}_{\text{Neumann}}(x, y) + \frac{\cos \alpha}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} \mathcal{G}_{\text{Dirichlet}}(x, y)
 \end{aligned}$$

prende il posto della funzione di Green.

Capitolo V

PROBLEMI AL CONTORNO

In questo capitolo risolviamo alcuni problemi al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali, dove il dominio ci permette di eseguire una separazione delle variabili.

1 Equazione di Laplace

1.1 Equazione di Laplace nel disco

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{V.1}$$

nel disco $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < L\}$ sotto la condizione al contorno

$$u = f \text{ sul bordo } \partial G. \tag{V.2}$$

Assumiamo che f sia continua sul cerchio ∂G , e cerchiamo una soluzione $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$. In coordinate polari l'equazione di Laplace ha la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

dove $0 \leq \theta < 2\pi$ (con periodicit ) e $0 < r < L$ con continuit  della soluzione per $r \rightarrow 0^+$. La separazione delle variabili conduce alle soluzioni $u_0(r)$, $u_m(r) \cos m\theta$ e $u_m(r) \sin m\theta$, dove $m = 0, 1, 2, \dots$ e la funzione $u_m(r)$ soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_m}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} u_m(r) = 0. \tag{V.3}$$

L'equazione (V.3) è un'equazione di Eulero $[r^2 u_m''(r) + r u_m'(r) - m^2 u_m(r) = 0]$ con la soluzione generale

$$u_m(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln(r), & m = 0 \\ c_1 r^m + c_2 r^{-m}, & m = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie. La continuità se $r \rightarrow 0^+$ conduce ad una soluzione costante se $m = 0$ e una proporzionale a r^m se $m = 1, 2, \dots$. Quindi la soluzione generale ha la forma

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (\text{V.4})$$

dove $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ sono opportune costanti.

Sostituiamo $r = L$ in (V.4) e applichiamo la condizione al contorno $u(L, \theta) = f(\theta)$. Risulta

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \quad (\text{V.5})$$

Applicando la teoria delle serie di Fourier abbiamo for $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \\ a_n L^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, & b_n L^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, \end{cases}$$

dove la serie (V.5) è uniformemente convergente in $\theta \in [-\pi, \pi]$ (e anche totalmente convergente) se $f(\theta)$ è continua (con $f(-\pi) = f(\pi)$) e regolare a tratti.

Sostituiamo ora le espressioni per i coefficienti di Fourier nell'espressione per la $u(r, \theta)$. Risulta

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{L} \right)^n \left[\cos n\theta \cos n\hat{\theta} + \sin n\theta \sin n\hat{\theta} \right] \right) f(\hat{\theta}) d\hat{\theta} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{L} \right)^n \cos n(\theta - \hat{\theta}) \right] f(\hat{\theta}) d\hat{\theta} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{r}{L} e^{i(\theta - \hat{\theta})} \right)^n + \left(\frac{r}{L} e^{-i(\theta - \hat{\theta})} \right)^n \right\} \right] f(\hat{\theta}) d\hat{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left[1 + \left\{ \frac{e^{i(\theta-\hat{\theta})} \frac{r}{L}}{1 - e^{i(\theta-\hat{\theta})} \frac{r}{L}} + \frac{e^{-i(\theta-\hat{\theta})} \frac{r}{L}}{1 - e^{-i(\theta-\hat{\theta})} \frac{r}{L}} \right\} \right] f(\hat{\theta}) d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \left(\frac{r}{L}\right)^2}{1 - 2\frac{r}{L} \cos(\theta - \hat{\theta}) + \left(\frac{r}{L}\right)^2} f(\hat{\theta}) d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|L^2 - r^2|}{L^2 - 2rL \cos(\theta - \hat{\theta}) + r^2} f(\hat{\theta}) d\hat{\theta},
\end{aligned}$$

il cosiddetto *integrale di Poisson*. Osserviamo che il nucleo di Poisson

$$\frac{|L^2 - r^2|}{L^2 - 2rL \cos(\theta - \hat{\theta}) + r^2}$$

è simmetrico in r e L e simmetrico in θ e $\hat{\theta}$. Inoltre, è strettamente positivo; le sue uniche singolarità si trovano sulla circonferenza $r = L$ per $\theta = \hat{\theta}$.

Discutiamo adesso le proprietà delle funzioni $u(r, \theta)$.

Proposizione V.1 *Sia $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Allora $u \in L^2(G)$. Inoltre,*

$$\lim_{r \rightarrow L^-} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - u(r, \theta)|^2 d\theta = 0. \quad (\text{V.6})$$

Dimostrazione. Applicando l'uguaglianza di Parseval alla (V.5) si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^{2n} (|a_n|^2 + |b_n|^2) < +\infty.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \|u\|_{L^2(G)}^2 &= \int_0^L \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r |u(r, \theta)|^2 d\theta dr \\
&= \frac{L^2 |a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^{2n+2}}{2n+2} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \\
&\leq \frac{L^2}{2} \left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^{2n} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right] = \frac{1}{\pi} \frac{L^2}{2} \|f\|_{L^2(-\pi, \pi)}.
\end{aligned}$$

In altre parole, $u \in L^2(G)$.

Per dimostrare la (V.6), si calcoli

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - u(r, \theta)|^2 d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} (L^n - r^n)^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2),$$

implicando la (V.6). □

1.2 Equazione di Laplace nella sfera

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \quad (\text{V.7})$$

nella sfera $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < L\}$ sotto la condizione al contorno

$$u = f \text{ sul bordo.} \quad (\text{V.8})$$

Assumiamo che f sia continua sul cerchio ∂G , e cerchiamo una soluzione $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$. In coordinate sferiche l'equazione di Laplace ha la forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = 0,$$

dove $0 < \varphi < \pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$ (con periodicità) e $0 < r < L$ con continuità della soluzione per $r \rightarrow 0^+$. La separazione delle variabili conduce alle soluzioni

$$r^l Y_l^m(\theta, \varphi),$$

dove $Y_l^m(\theta, \varphi)$ sono le funzioni sferiche ($l = 0, 1, 2, \dots$ e $m = -l, \dots, l$). Tali funzioni hanno la forma

$$Y_l^m(\varphi, \theta) = \begin{cases} P_l^m(\cos \varphi)(\sin \varphi)^m \cos(m\theta), & m = 0, 1, \dots, l; \\ P_l^{|m|}(\cos \varphi)(\sin \varphi)^m \sin(|m|\theta), & m = -1, -2, \dots, -l, \end{cases}$$

dove $l = 0, 1, 2, \dots$. La completezza di un sistema ortogonale di funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ significa che ogni funzione f appartenente a $L_2(S^2)$ può essere sviluppata in serie di Fourier di queste funzioni:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_l^{(m)} Y_l^m(\theta, \varphi),$$

convergente in $L^2(S^2)$. I coefficienti $a_l^{(m)}$ sono calcolati mediante la formula

$$a_l^{(m)} = \frac{2l+1}{2\pi(1+\delta_{0,m})} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi,$$

poichè le funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ formano un sistema ortogonale e completo in $L^2(S^2)$, ed inoltre

$$\|Y_l^m\|_{L^2(S^2)}^2 = 2\pi \frac{1+\delta_{0,m}}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{l-|m|!}.$$

In tal caso, la soluzione $u(r, \theta, \varphi)$ del problema al contorno (V.7)-(V.8) ha la seguente forma

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_l^{(m)} \left(\frac{r}{L} \right)^l Y_l^m(\theta, \varphi).$$

1.3 Equazione di Laplace nel cilindro

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{V.9}$$

nel cilindro $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < L, 0 < z < h\}$ sotto la condizione al contorno

$$u = f \text{ sul bordo } \partial G \text{ del cilindro.}$$

Assumiamo che f sia continua sul bordo ∂G del cilindro e cerchiamo una soluzione $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ del problema al contorno. Tale soluzione è unica (perchè?). Suddividendo ∂G nei tre insiemi $\partial_L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = L, 0 \leq z \leq h\}$, $\partial_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq L, z = 0\}$ e $\partial_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq L, z = h\}$, scriviamo f come la somma $f_L + f_0 + f_h$ di tre funzioni con supporto in ∂_L , ∂_0 e ∂_h , rispettivamente. Le corrispondenti soluzioni u_L , u_0 e u_h dell'equazione di Laplace (V.9) con condizione al contorno $u_L = f_L$, $u_0 = f_0$ e $u_h = f_h$ su ∂G soddisfano

$$u_L + u_0 + u_h = u,$$

grazie alla linearità del problema al contorno.

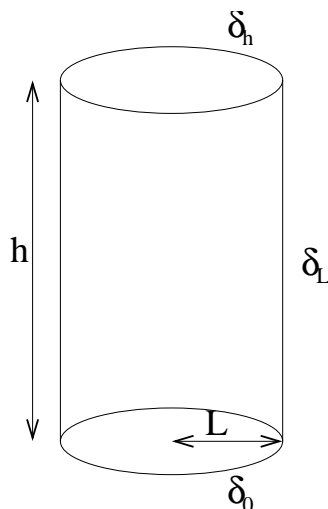


Figura V.1: Suddivisione del cilindro in ∂_0 , ∂_h e ∂_L .

Risolviamo i tre problemi (per u_L , u_0 e u_h) separatamente, utilizzando le coordinate cilindriche (r, θ, z) . In queste coordinate si ha $G = \{(r, \theta, z) : 0 <$

$r < L$, $0 < z < h$ }. Applicando la separazione delle variabili all'equazione di Laplace in coordinate cilindriche

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{V.10})$$

cioè sostituendo $u(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ nella (V.9) e utilizzando la condizione di periodicità $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$, otteniamo

$$\frac{1}{rR(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0, \quad (\text{V.11})$$

dove $m = 0, 1, 2, \dots$, $\Theta(\theta)$ è costante per $m = 0$ e $\Theta(\theta)$ è una combinazione lineare di $\cos m\theta$ e $\sin m\theta$ per $m = 1, 2, \dots$.

Prima risolviamo il problema al contorno per u_L . Per convenienza scriviamo u al posto di u_L e f invece di f_L . In coordinate cilindriche si ha

$$u(r, \theta, 0) = u(r, \theta, h) = 0 \implies Z(0) = Z(h) = 0,$$

mentre $Z''(z)/Z(z)$ è una costante C . Affinché $Z(z)$ sia non banale, questa costante C deve essere non positiva. Si ottiene

$$Z(z) \sim \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right), \quad C = -\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dalla (V.11) e dal valore di C troviamo

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left(\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = 0.$$

Sostituendo $R(r) = \tilde{R}(\rho)$ per $\rho = n\pi r/h$, otteniamo l'equazione di Bessel immaginaria di ordine m

$$\frac{d^2 \tilde{R}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{R}}{d\rho} - \left(1 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) \tilde{R}(\rho) = 0. \quad (\text{V.12})$$

L'unica soluzione della (V.12) (tranne un fattore costante) limitata se $\rho \rightarrow 0^+$ è la funzione di Bessel immaginaria $I_m(\rho)$. Questa funzione è reale per $\rho > 0$, è proporzionale a $J_m(i\rho)$, e non ha nessuno zero in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ciò segue dal fatto che la funzione di Bessel $J_m(\rho)$ non ha zeri non reali. Quindi $J_m(\rho) > 0$ per $\rho > 0$.

In variabili separate abbiamo trovato le soluzioni

$$\begin{cases} I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right), & m = 0, n = 1, 2, \dots, \\ I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) [c_1 \cos m\theta + c_2 \sin m\theta], & m, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Dunque la soluzione $u(r, \theta, z)$ si può sviluppare nella serie di Fourier

$$u(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \left[\frac{a_{0n}}{2} I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta) I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right) \right], \quad (\text{V.13})$$

dove

$$f(\theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \left[\frac{a_{0n}}{2} I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta) I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right) \right]. \quad (\text{V.14})$$

Discutiamo ora la convergenza della serie (V.14). Supponiamo che f sia di classe C^1 su ∂_L e si annulli su $\partial_L \cap [\partial_0 \cup \partial_h]$. Allora, per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$, $f(\theta, \cdot)$ è di classe C^1 in $[0, h]$, soddisfa $f(\theta, 0) \equiv f(\theta, h) \equiv 0$ e $f(0, z) \equiv f(2\pi, z)$ e è di classe C^1 in $\theta \in [0, 2\pi]$. Quindi la sua serie di Fourier in z è totalmente convergente e i suoi coefficienti di Fourier sono funzioni di θ di classe C^1 che hanno gli stessi valori per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{a_{0n}}{2} I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta) I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right) \\ = \frac{2}{h} \int_0^h f(\theta, z) \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) dz. \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

Ci ricordiamo ora la teoria degli operatori di Sturm-Liouville monodimensionali. Sia $Lu = -u''$ su $[0, 2\pi]$ con condizioni periodiche $u(0) = u(2\pi) = 0$ e $u'(0) = u'(2\pi)$. Allora ogni $g \in C^1[0, 2\pi]$ con $g(0) = g(2\pi)$ e $g'(0) = g'(2\pi)$ ha uno sviluppo uniformemente convergente

$$g(\theta) = \frac{g_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (g_{mc} \cos(m\theta) + g_{ms} \sin(m\theta)),$$

dove

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta, & g_{mc} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos(m\theta) d\theta, \\ g_{ms} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin(m\theta) d\theta, & \frac{1}{\pi} \|g\|_{L_2(0,2\pi)}^2 &= \frac{|g_0|^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (|g_{mc}|^2 + |g_{ms}|^2). \end{aligned}$$

Torniamo al problema originale. Dalle (V.15) si ha

$$\begin{aligned} a_{0n} I_0 \left(\frac{n\pi L}{h} \right) &= \frac{2}{\pi h} \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta, z) \sin \left(\frac{n\pi z}{h} \right) d\theta dz; \\ a_{mn} I_m \left(\frac{n\pi L}{h} \right) &= \frac{2}{\pi h} \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta, z) \cos m\theta \sin \left(\frac{n\pi z}{h} \right) d\theta dz; \\ b_{mn} I_m \left(\frac{n\pi L}{h} \right) &= \frac{2}{\pi h} \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta, z) \sin m\theta \sin \left(\frac{n\pi z}{h} \right) d\theta dz, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_{0n}|^2}{2} I_0 \left(\frac{n\pi L}{h} \right)^2 + \sum_{m=1}^{\infty} (|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2) I_m \left(\frac{n\pi L}{h} \right)^2 \right) \\ &= \frac{2}{\pi h} \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta, z)|^2 d\theta dz. \end{aligned}$$

Nel modo analogo si ottiene dalla (V.13)

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_{0n}|^2}{2} I_0 \left(\frac{n\pi r}{h} \right)^2 + \sum_{m=1}^{\infty} (|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2) I_m \left(\frac{n\pi r}{h} \right)^2 \right) \\ &= \frac{2}{\pi h} \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} |u(r, \theta, z)|^2 d\theta dz, \end{aligned}$$

e dalla (V.13) e (V.14)

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_{0n}|^2}{2} \left[I_0 \left(\frac{n\pi L}{h} \right) - I_0 \left(\frac{n\pi r}{h} \right) \right]^2 \right. \\ &+ \left. \sum_{m=1}^{\infty} (|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2) \left[I_m \left(\frac{n\pi L}{h} \right) - I_m \left(\frac{n\pi r}{h} \right) \right]^2 \right) \\ &= \frac{2}{\pi h} \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta, z) - u(r, \theta, z)|^2 d\theta dz. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{r \rightarrow L^-} \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta, z) - u(r, \theta, z)|^2 d\theta dz = 0. \quad (\text{V.16})$$

Adesso risolviamo i problemi al contorno per la u_0 e u_h , cioè sotto l'ipotesi che $f(L, \theta, z) \equiv 0$ e ponendo $u = u_0 + u_h$ e $f = f_0 + f_h$. In tal caso sfruttiamo il fatto che dalla separazione delle variabili segue:

$$\frac{1}{rR(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} = C$$

è costante. Affinché ci sia una soluzione non banale limitata se $r \rightarrow 0^+$ e con uno zero per $r = L$, bisogna scegliere la costante C tale che risulta l'equazione di Bessel [cioè, $C < 0$] invece dell'equazione di Eulero [$C = 0$] e l'equazione di Bessel immaginaria [$C > 0$]. Ponendo $C = -\nu^2$ con $\nu > 0$, risulta

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\nu^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = 0.$$

La sostituzione $\tilde{R}(\rho) = R(r)$ e $\rho = r\nu$ conduce all'equazione di Bessel di ordine m

$$\frac{d^2 \tilde{R}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{R}}{d\rho} + \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) \tilde{R}(\rho) = 0.$$

Affinché la sua soluzione sia limitata se $\rho \rightarrow 0^+$, bisogna richiedere $\tilde{R}(\rho) \sim J_m(\rho)$. Siano $0 < \nu_{m1} < \nu_{m2} < \dots$ gli infiniti zeri della funzione di Bessel $J_m(\cdot)$ in $(0, +\infty)$. Allora la condizione al contorno

$$u(L, \theta, z) = 0 \implies R(L) = 0$$

implica che $\nu L = \nu_{mn}$ per qualche $n = 1, 2, \dots$. Di conseguenza,

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \nu^2 = \left(\frac{\nu_{mn}}{L} \right)^2.$$

In tal caso

$$\begin{aligned} Z(z) &\sim \sinh\left(\frac{\nu_{mn}z}{L}\right) && \begin{cases} u = u_h, f = f_h, \\ \text{quindi se } u(r, \theta, 0) = 0 \text{ e } f(r, \theta) = 0; \end{cases} \\ Z(z) &\sim \sinh\left(\frac{\nu_{mn}(h-z)}{L}\right) && \begin{cases} u = u_0, f = f_0, \\ \text{quindi se } u(r, \theta, h) = 0 \text{ e } f(r, \theta) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Nel primo caso [$u(r, \theta, 0) = 0$ e $f(r, \theta) = 0$] si ha lo sviluppo

$$\begin{aligned} u(r, \theta, z) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_{0n}}{2} J_0\left(\frac{\nu_{0n}r}{L}\right) \sinh\left(\frac{\nu_{0n}z}{L}\right) \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta) J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right) \sinh\left(\frac{\nu_{mn}z}{L}\right) \right], \quad (\text{V.17}) \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} f(r, \theta) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_{0n}}{2} J_0\left(\frac{\nu_{0n}r}{L}\right) \sinh\left(\nu_{0n} \frac{h}{L}\right) \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta) J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right) \sinh\left(\frac{\nu_{mn}h}{L}\right) \right], \quad (\text{V.18}) \end{aligned}$$

mentre nel secondo caso $[u(r, \theta, h) = 0 \text{ e } f(r, \theta) = 0]$ si ha lo sviluppo

$$u(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_{0n}}{2} J_0 \left(\frac{\nu_{0n} r}{L} \right) \sinh \left(\frac{\nu_{0n} (h-z)}{L} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta) J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L} \right) \sinh \left(\frac{\nu_{mn} (h-z)}{L} \right) \right], \quad (\text{V.19})$$

dove

$$f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_{0n}}{2} J_0 \left(\frac{\nu_{0n} r}{L} \right) \sinh \left(\nu_{0n} \frac{h}{L} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta) J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L} \right) \sinh \left(\frac{\nu_{mn} h}{L} \right) \right], \quad (\text{V.20})$$

Discutiamo ora la convergenza delle serie (V.18) e (V.20). Supponiamo che f sia di classe C^1 su ∂_h [rispettivamente, ∂_0] e si annulli su $\partial_h \cap \partial_L$ [rispettivamente, $\partial_0 \cap \partial_L$]. Allora, per ogni $r \in [0, L]$, $f(r, \cdot)$ è di classe C^1 in $[-\pi, \pi]$, soddisfa $f(r, -\pi) \equiv f(r, \pi)$, è di classe C^1 in $r \in [0, L]$ e si annulla per $r = L$. Quindi la sua serie di Fourier è totalmente convergente e i suoi coefficienti di Fourier sono funzioni di r di classe C^1 che si annullano per $r = L$. Si ha Analogamente alle (V.15) si ha in ambedue casi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} J_0 \left(\frac{\nu_{0n} r}{L} \right) \sinh \left(\frac{\nu_{0n} h}{L} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) d\theta; \quad (\text{V.21})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L} \right) \sinh \left(\frac{\nu_{mn} h}{L} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) \cos m\theta d\theta; \quad (\text{V.22})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L} \right) \sinh \left(\frac{\nu_{mn} h}{L} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) \sin m\theta d\theta. \quad (\text{V.23})$$

Ci ricordiamo ora la teoria degli operatori di Sturm-Liouville. Sia $Lu = -(ru')' + (m^2/r)$ con condizioni al contorno $u(r) = O(1)$ per $m = 0$, $u(r) = O(r)$ per $m = 1, 2, \dots$, e $u(L) = 0$, e problema agli autovalori $(Lu)(r) = \nu r u(r)$. Allora gli autovalori sono ν_{mn}^2 e le autofunzioni sono $J_m(\nu_{mn} r/L)$ dove ν_{mn} è lo zero positivo n -esimo delle $J_m(\cdot)$ ($n = 1, 2, \dots$). Essi sono ortogonali nello spazio di Hilbert $L_2([0, L]; r dr)$. Inoltre,

$$\int_0^L r J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L} \right)^2 dr = L^2 \int_0^1 x J_m(\nu_{mn} x)^2 dx = \frac{L^2}{2} J_m'(\nu_{mn})^2.$$

Allora ogni $g \in C^2((0, L])$ che soddisfa le condizioni al contorno in $r = 0$ ed $r = L$ e la condizione $-(rg')' + (m^2/r)g \in L_2([0, L]; r dr)$ [cioè, $g \in \mathcal{M}_{L_m}$.] si può sviluppare nella serie uniformemente convergente

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L} \right),$$

dove

$$g_n = \frac{2}{L^2 J'_m(\nu_{mn})^2} \int_0^L r g(r) J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L} \right) dr;$$

$$\|g\|_{L_2([0, L]; r dr)}^2 = \frac{L^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^2 J'_m(\nu_{mn})^2.$$

Partendo dalle (V.21)-(V.23), si ha

$$a_{0n} \sinh \left(\frac{\nu_{0n} h}{L} \right) = \frac{2}{\pi L^2 J'_0(\nu_{0n})^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r f(r, \theta) J_0 \left(\frac{\nu_{0n} r}{L} \right) d\theta dr; \quad (\text{V.24})$$

$$a_{mn} \sinh \left(\frac{\nu_{mn} h}{L} \right) = \frac{2}{\pi L^2 J'_m(\nu_{mn})^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r f(r, \theta) \cos m\theta J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L} \right) d\theta dr; \quad (\text{V.25})$$

$$b_{mn} \sinh \left(\frac{\nu_{mn} h}{L} \right) = \frac{2}{\pi L^2 J'_m(\nu_{mn})^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r f(r, \theta) \sin m\theta J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L} \right) d\theta dr, \quad (\text{V.26})$$

dove

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{|a_{0n}|^2}{2} J'_0(\mu_{0n})^2 \sinh^2 \left[\frac{\nu_{0n} h}{L} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} (|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2) J'_m(\mu_{mn})^2 \sinh^2 \left[\frac{\nu_{mn} h}{L} \right] \right]$$

$$= \frac{2}{\pi L^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r |f(r, \theta)|^2 d\theta dr.$$

Nel modo analogo si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{|a_{0n}|^2}{2} J'_0(\mu_{0n})^2 \sinh^2 \left[\frac{\nu_{0n} z}{L} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} (|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2) J'_m(\mu_{mn})^2 \sinh^2 \left[\frac{\nu_{mn} z}{L} \right] \right]$$

$$= \frac{2}{\pi L^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r |u(r, \theta, z)|^2 d\theta dr;$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_{0n}|^2}{2} J_0'(\mu_{0n})^2 \left[\sinh\left(\frac{\nu_{0n}h}{L}\right) - \sinh\left(\frac{\nu_{0n}z}{L}\right) \right]^2 \right. \\
& \left. + \sum_{m=1}^{\infty} (|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2) J_m'(\mu_{mn})^2 \left[\sinh\left(\frac{\nu_{mn}h}{L}\right) - \sinh\left(\frac{\nu_{mn}z}{L}\right) \right]^2 \right) \\
& = \frac{2}{\pi L^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r |f(r, \theta) - u(r, \theta, z)|^2 d\theta dr.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, se f ha il suo supporto su ∂_0 (∂_h , rispettivamente), allora

$$\int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r |f(r, \theta) - u(r, \theta, z)|^2 d\theta dr$$

tende a zero se $z \rightarrow 0^+$ ($z \rightarrow h^-$, rispettivamente).

2 Equazione di Helmholtz

2.1 Equazione di Helmholtz sul Disco e sulla Sfera

Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{V.27}$$

dove x appartiene al disco (sfera) di raggio L e centro l'origine, con una delle condizioni al contorno

$$u(x) = 0 \text{ per } |x| = L \quad [\text{Dirichlet}], \tag{V.28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ per } |x| = L \quad [\text{Neumann}]. \tag{V.29}$$

Utilizzando le coordinate polari (per il disco) o sferiche (per la sfera) si può scrivere la (V.29) nella forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad [\text{Neumann}], \tag{V.30}$$

dove $r = |x|$. Gli autovalori sono tutti positivi nel caso della condizione di Dirichlet, mentre nel caso di Neumann si annulla uno degli autovalori.

a. Disco. La separazione delle variabili in coordinate polari (r, θ) conduce all'equazione differenziale

$$R''(r) + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = 0, \tag{V.31}$$

dove $0 < r < L$, $R(0)$ esiste limitato e $R(L) = 0$ [Dirichlet] oppure $R'(L) = 0$ [Neumann]. Nel caso di Neumann, $k = 0$ è autovalore con la corrispondente autofunzione $\varphi_0(x) = (\pi L^2)^{-1/2}$ normalizzata in $L^2(|x| < L)$. Tutti gli altri autovalori sono positivi. Dalla condizione che esista finita $R(0)$ segue subito che per $k > 0$

$$R(r) \sim J_m(kr),$$

dove $J_m(kL) = 0$ [Dirichlet] oppure $J'_m(kL)$ [Neumann]. Siano $0 < \nu_{m,1} < \nu_{m,2} < \nu_{m,3} < \dots$ gli zeri positivi (e automaticamente semplici) della funzione di Bessel $J_m(x)$ [Dirichlet] oppure della sua derivata $J'_m(x)$. In tal caso gli autovalori positivi sono

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{\nu_{m,n}}{L} \right)^2$$

e le corrispondenti autofunzioni sono

$$\begin{cases} \frac{1}{N_{0,n}^{\text{Dir}} \sqrt{2\pi}} J_0 \left(\frac{\nu_{0,n} r}{L} \right), & \text{Dirichlet,} \\ \frac{1}{N_{0,n}^{\text{Neu}} \sqrt{2\pi}} J_0 \left(\frac{\nu_{0,n} r}{L} \right), & \text{Neumann,} \end{cases}$$

per $m = 0$ e

$$\begin{cases} \frac{1}{N_{m,n}^{\text{Dir}} \sqrt{\pi}} J_m \left(\frac{\nu_{m,n} r}{L} \right) \frac{\cos(m\theta)}{\sin(m\theta)}, & \text{Dirichlet,} \\ \frac{1}{N_{m,n}^{\text{Neu}} \sqrt{\pi}} J_m \left(\frac{\nu_{m,n} r}{L} \right) \frac{\cos(m\theta)}{\sin(m\theta)}, & \text{Neumann} \end{cases}$$

per $m = 1, 2, \dots$, dove le costanti di normalizzazione valgono

$$\begin{cases} N_{m,n}^{\text{Dir}} = \left[\frac{L^2}{2} J'_m(\nu_{m,n})^2 \right]^{1/2}, & \text{Dirichlet,} \\ N_{m,n}^{\text{Neu}} = \left[\frac{L^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\nu_{m,n}^2} \right) J_m(\nu_{m,n})^2 \right]^{1/2}, & \text{Neumann,} \end{cases}$$

per $m = 0, 1, 2, \dots$. Gli autovalori enumerati $m = 0$ sono semplici, mentre quelli enumerati $m = 1, 2, \dots$ hanno molteplicità 2. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(|x| < L)$.

b. Sfera. La separazione delle variabili in coordinate sferiche conduce all'equazione radiale

$$R''(r) + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r) = 0, \quad (\text{V.32})$$

dove $0 < r < L$, $R(0)$ esiste limitato e $R(L) = 0$ [Dirichlet] oppure $R'(L) = 0$ [Neumann]. Nel caso di Neumann, $k = 0$ è autovalore con la corrispondente autofunzione $\varphi_0(x) = (\pi L^2)^{-1/2}$ normalizzata in $L^2(|x| < L)$. Tutti gli altri autovalori sono positivi. Il fattore angolare nell'autofunzione è la funzione sferica $Y_l^m(\theta, \varphi)$, dove $m = -l, = l + 1, = l + 2, \dots, l - 1, l$. Quindi ad ogni autovalore dell'equazione radiale (V.32) con termine $l(l + 1)/r^2$ corrispondono $2l + 1$ autofunzioni linearmente indipendenti dell'equazione tridimensionale. Sostituendo

$$S(r) = \sqrt{r} R(r)$$

si arriva all'equazione

$$S''(r) + \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} + \left(k^2 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{r^2} \right) S(r) = 0, \quad (\text{V.33})$$

dove $0 < r < L$, $\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-1/2} S(r)$ esiste limitato e $S(L) = 0$ [Dirichlet] oppure $(S'(L)/S(L)) = (1/2L)$.

L'equazione (V.32) coincide con l'equazione differenziale per le funzioni sferiche di Bessel di ordine $l + \frac{1}{2}$ nella variabile kr . La condizione ad $r = 0$ ci dà

$$R(r) \sim j_l(kr), \quad S(r) \sim J_{l+\frac{1}{2}}(kr).$$

Inoltre, sotto la condizione di Dirichlet kL è uno zero della funzione j_l oppure della funzione $J_{l+\frac{1}{2}}$. D'altra parte, sotto la condizione di Neumann kL è uno zero della funzione j'_l oppure della funzione $2\rho J'_{l+\frac{1}{2}}(\rho) - J_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$. Enumerando questi zeri (semplici) $0 < \nu_{l,0} < \nu_{l,1} < \nu_{l,3} < \dots$ otteniamo

$$R(r) \sim j_l(\nu_{l,n}r/L), \quad S(r) \sim J_{l+\frac{1}{2}}(\nu_{l,n}r/L),$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Nel caso della sfera la costante di normalizzazione [Vedi la (III.37) e la (III.26)]

$$\begin{aligned} N_{l,n} &= \left[\int_0^L r^2 \left| j_l \left(\frac{\nu_{l,n}r}{L} \right) \right|^2 dr \right]^{1/2} = \left[\frac{\pi L}{2\nu_{l,n}} \int_0^L r \left| J_{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu_{l,n}r}{L} \right) \right|^2 dr \right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{\pi L^3}{2\nu_{l,n}} \int_0^1 s \left| J_{l+\frac{1}{2}}(\nu_{l,n}s) \right|^2 ds \right]^{1/2} = \left[\frac{\pi L^3}{4\nu_{l,n}} J_{l+\frac{1}{2}}^2(\nu_{l,n}) \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio vale soltanto per le condizioni di Dirichlet. Moltiplicando dalla funzione sferica $Y_l^m(\theta, \varphi)$ normalizzata in $L^2(S^2)$ si ottengono tutte le autofunzioni normalizzate in $L^2(|x| < L)$.

3 Equazioni delle onde e del calore

3.1 Equazioni delle onde e del calore per uno spettro di autovalori

Partendo da un operatore differenziale L di Sturm-Liouville definito su un opportuno dominio spaziale G di funzioni che soddisfano ad opportune condizioni al contorno omogenee (Dirichlet, Neumann, miste, ecc.), studiamo la corrispondente equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -(Lu)(x, t) + f(x, t), \quad x \in G, \quad t > 0, \quad (\text{V.34})$$

con le due condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (\text{V.35})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x). \quad (\text{V.36})$$

Per $f(x, t) \equiv 0$ la separazione delle variabili

$$u(x, t) = \psi(x)T(t) \quad (\text{V.37})$$

conduce all'equazione

$$-\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{(L\psi)(x)}{\psi(x)} = \text{costante}. \quad (\text{V.38})$$

Partendo da un operatore di Sturm-Liouville L con spettro non negativo (tale che la costante nella (V.38) è uguale a λ per un'opportuna $\lambda \geq 0$), risultano le equazioni

$$(L\psi)(x) = \lambda\psi(x), \quad (\text{V.39})$$

$$T(t) = \begin{cases} T(0) \cos(t\sqrt{\lambda}) + T'(0) \frac{\sin(t\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}, & \lambda > 0, \\ T(0) + T'(0)t, & \lambda = 0. \end{cases} \quad (\text{V.40})$$

Dunque, se L ha un numero infinito di autovalori $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ di molteplicità finita (dove un certo autovalore appare m volte se la sua molteplicità è uguale ad m) e una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ di corrispondenti autofunzioni

(in $L^2(G)$), allora per

$$u_n(t) = \langle u(\cdot, t), \varphi_n \rangle = \int_G u(x, t) \overline{\varphi_n(x)} dx, \quad (\text{V.41})$$

$$f_n(t) = \langle f(\cdot, t), \varphi_n \rangle = \int_G f(x, t) \overline{\varphi_n(x)} dx, \quad (\text{V.42})$$

$$u_{0,n} = \langle u_0, \varphi_n \rangle = \int_G u_0(x) \overline{\varphi_n(x)} dx, \quad (\text{V.43})$$

$$u_{1,n} = \langle u_1, \varphi_n \rangle = \int_G u_1(x) \overline{\varphi_n(x)} dx, \quad (\text{V.44})$$

otteniamo

$$u_n''(t) = -\lambda_n u_n(t) + f_n(t), \quad (\text{V.45})$$

$$u_n(0) = u_{0,n}, \quad (\text{V.46})$$

$$u_n'(0) = u_{1,n}. \quad (\text{V.47})$$

La soluzione del sistema di equazioni (V.45)-(V.47) è

$$u_n(t) = \begin{cases} u_{0,n} \cos(t\sqrt{\lambda_n}) + u_{1,n} \frac{\sin(t\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}} + \int_0^t \frac{\sin((t-\tau)\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}} f_n(\tau) d\tau, & \lambda_n > 0, \\ u_{0,n} + u_{1,n}t + \int_0^t (t-\tau) f_n(\tau) d\tau, & \lambda_n = 0. \end{cases} \quad (\text{V.48})$$

Nello stesso modo si risolve l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(Lu)(x, t) + f(x, t), \quad x \in G, t > 0, \quad (\text{V.49})$$

con la condizione iniziale

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (\text{V.50})$$

Utilizzando la precedente base ortonormale di autofunzioni di L risulta

$$u_n'(t) = -\lambda_n u_n(t) + f_n(t), \quad (\text{V.51})$$

$$u_n(0) = u_{0,n}, \quad (\text{V.52})$$

La soluzione del sistema di equazioni (V.51)-(V.52) è

$$u_n(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_n t} u_{0,n} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau, & \lambda_n > 0, \\ u_{0,n} + \int_0^t f_n(\tau) d\tau, & \lambda_n = 0. \end{cases} \quad (\text{V.53})$$

Utilizzando la formula di Parseval

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x) = \int_G u(y, t) \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_n(y)} \varphi_n(x) dy, \quad (\text{V.54})$$

otteniamo per l'equazione del calore

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x) \int_G \overline{\varphi_n(y)} u_0(y) dy \\ &+ \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(t-\tau)} \varphi_n(x) \int_G \overline{\varphi_n(y)} f(y, \tau) dy d\tau \\ &= \int_G \mathcal{G}(x, y; t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_G \mathcal{G}(x, y; t - \tau) f(y, \tau) dy d\tau, \end{aligned} \quad (\text{V.55})$$

dove

$$\mathcal{G}(x, y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)}. \quad (\text{V.56})$$

Utilizzando la (V.54) troviamo per l'equazione delle onde

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_G \left[\mathcal{H}(x, y; t) u_1(y) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(x, y; t) u_0(y) \right] dy \\ &+ \int_0^t \int_G \mathcal{H}(x, y; t - \tau) f(y, \tau) dy d\tau, \end{aligned} \quad (\text{V.57})$$

dove¹

$$\mathcal{H}(x, y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(t\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)}, \quad (\text{V.58})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(x, y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(t\sqrt{\lambda_n}) \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)}. \quad (\text{V.59})$$

3.2 Alcuni esempi

a. $Lu = -u''$ con $u(0) = u(a) = 0$. Consideriamo $Lu = -u''$ nell'intervallo $(0, a)$ con le condizioni di Dirichlet $u(0) = u(a) = 0$. In tal caso

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right),$$

¹Si calcoli il limite di $(\sin(t\sqrt{\lambda})/\sqrt{\lambda})$ per $\lambda \downarrow 0$ se $\lambda = 0$.

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Allora

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x, y; t) &= \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \frac{-\cos\left(\frac{n\pi(x+y)}{a}\right) + \cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{a}\right)}{2} \right] \\ &= \frac{-\vartheta_3\left(\pi \frac{x+y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}\right) + \vartheta_3\left(\pi \frac{x-y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}\right)}{2a},\end{aligned}$$

dove $\vartheta_3(z, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nz)$ è una delle funzioni Theta di Jacobi ([16], 21.11).²

b. $Lu = -u''$ con $u'(0) = u'(a) = 0$. Consideriamo $Lu = -u''$ nell'intervallo $(0, a)$ con le condizioni di Neumann $u'(0) = u'(a) = 0$. In tal caso

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{n0}}{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

dove $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Allora

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x, y; t) &= \frac{1}{a} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \frac{\cos\left(\frac{n\pi(x+y)}{a}\right) + \cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{a}\right)}{2} \right] \\ &= \frac{\vartheta_3\left(\pi \frac{x+y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}\right) + \vartheta_3\left(\pi \frac{x-y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}\right)}{2a}.\end{aligned}$$

c. $Lu = -u''$ con $u(0) = u'(a) = 0$. Consideriamo ora $Lu = -u''$ nell'intervallo $(0, a)$ con la condizione di Dirichlet all'estremo sinistro e quella di Neumann all'estremo destro: $u(0) = u'(a) = 0$. In tal caso

$$\lambda_n = \left(\frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{a}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{(n + \frac{1}{2})\pi x}{a}\right),$$

dove $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Allora

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x, y; t) &= \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)^2(\pi^2 t/4a^2)} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2a}\right)\end{aligned}$$

²Si ha $\vartheta_3(z, q) = G \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1} \cos(2z) + q^{4n-2})$, dove $G = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$.

$$= \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)^2(\pi^2 t/4a^2)} \left\{ -\cos\left(\frac{(2n+1)\pi(x+y)}{2a}\right) + \cos\left(\frac{(2n+1)\pi(x-y)}{2a}\right) \right\} = \frac{-\vartheta_2\left(\pi\frac{x+y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}\right) + \vartheta_2\left(\pi\frac{x-y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}\right)}{2a},$$

dove $\vartheta_2(z, q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2/4} \cos((2n+1)z)$ è una delle funzioni Theta di Jacobi ([16], 21.11).³

3.3 Quando esiste lo spettro continuo

Finora abbiamo considerato equazioni delle onde e del calore, dove il corrispondente operatore di Sturm-Liouville ha uno spettro consistente in autovalori. In tal caso la trasformazione \mathcal{F} di una funzione $u \in L^2(G)$ nella successione $\{\langle u, \varphi_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ dei suoi coefficienti rispetto alla base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ è un operatore unitario da $L^2(G)$ in ℓ^2 , cioè

$$\mathcal{F}u = (\langle u, \varphi_n \rangle)_{n=1}^{\infty}, \quad \mathcal{F}^{-1}((c_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad (\text{V.60})$$

secondo la formula di Parseval:

$$\|u\|_{L^2(G)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, \varphi_n \rangle|^2.$$

In tal caso l'operatore di Sturm-Liouville L viene convertito nella matrice diagonale infinita $\Lambda = \text{diag}(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$. In altre parole,

$$\begin{array}{ccc} L^2(G) & \xrightarrow{L} & L^2(G) \\ \mathcal{F} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F} \\ \ell^2 & \xrightarrow{\Lambda} & \ell^2 \end{array} \quad (\text{V.61})$$

a. $Lu = -u''$ sulla retta reale. Consideriamo prima $Lu = -u''$ in $L^2(\mathbb{R})$. In tal caso la trasformata di Fourier \mathcal{F} (che ha la proprietà $\|\mathcal{F}u\|_2 = (2\pi)^{1/2}\|u\|_2$) converte l'operatore L nella moltiplicazione Λ da k^2 , cioè

$$(\Lambda v)(k) = (\mathcal{F}L\mathcal{F}^{-1}v)(k) = k^2 v(k), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (\text{V.62})$$

In altre parole, abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}, dx) & \xrightarrow{L=-(d^2/dx^2)} & L^2(\mathbb{R}, dx) \\ \mathcal{F} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F} \\ L^2(\mathbb{R}, dk) & \xrightarrow{\Lambda=k^2} & L^2(\mathbb{R}, dk) \end{array} \quad (\text{V.63})$$

³Si ha $\vartheta_2(z, q) = 2Gq^{1/4} \cos(z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n} \cos(2z) + q^{4n})$, dove $G = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$.

Per l'equazione del calore la trasformata di Fourier conduce ai sistemi iniziali

$$\hat{u}'(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t) + \hat{f}(k, t), \quad (\text{V.64})$$

$$\hat{u}(k, 0) = \hat{u}_0(k), \quad (\text{V.65})$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è soltanto un parametro. La soluzione del sistema (V.64)-(V.65) è

$$\hat{u}(k, t) = e^{-k^2 t} \hat{u}_0(k) + \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} \hat{f}(k, \tau) d\tau. \quad (\text{V.66})$$

Quindi

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left[e^{-k^2 t} \hat{u}_0(k) + \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} \hat{f}(k, \tau) d\tau \right] e^{-ikx} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x, y; t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x, y; t-\tau) f(y, \tau) dy d\tau, \end{aligned} \quad (\text{V.67})$$

dove

$$\mathcal{G}(x, y; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(y-x)} e^{-k^2 t} dk = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/4t}. \quad (\text{V.68})$$

Per l'equazione delle onde l'applicazione della trasformata di Fourier \mathcal{F} conduce ai sistemi a valori iniziali

$$\hat{u}''(k, t) = k^2 \hat{u}(k, t) + \hat{f}(k, t), \quad (\text{V.69})$$

$$\hat{u}(k, 0) = \hat{u}_0(k), \quad (\text{V.70})$$

$$\hat{u}'(k, 0) = \hat{u}_1(k), \quad (\text{V.71})$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è soltanto un parametro. La soluzione del sistema (V.69)-(V.71) è

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}_0(k) \cos(kt) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(kt)}{k} + \int_0^t \frac{\sin(k(t-\tau))}{k} \hat{f}(k, \tau) d\tau, \quad (\text{V.72})$$

e dunque

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{u}_0(k) \cos(kt) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(kt)}{k} \right] e^{-ikx} dk \\ &+ \int_0^t \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k(t-\tau))}{k} \hat{f}(k, \tau) e^{-ikx} dx d\tau. \end{aligned} \quad (\text{V.73})$$

Si trova la (V.57), dove

$$\mathcal{H}(x, y; t) = \frac{1}{2} \{H(y - x + t) - H(y - x - t)\}, \quad (\text{V.74})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(x, y; t) = \frac{1}{2} \{\delta(y - x + t) + \delta(y - x - t)\}, \quad (\text{V.75})$$

essendo $H(\tau)$ la funzione di Heaviside e $\delta(\tau)$ quella di Dirac. In particolare, se $u_1(x) \equiv 0$ e $f(x, t) \equiv 0$ si trova la soluzione

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{u_0(x - t) + u_0(x + t)\}. \quad (\text{V.76})$$

b. $Lu = -u''$ sulla semiretta. Consideriamo ora $Lu = -u''$ in $L^2(\mathbb{R}^+)$ con la condizione di Dirichlet $u(0) = 0$ [risp., di Neumann $u'(0) = 0$]. Considerando $u \in L^2(\mathbb{R}^+, dx)$ si introduce le trasformata di Fourier seno \mathcal{F}_s e di Fourier coseno \mathcal{F}_c :

$$(\mathcal{F}_s u)(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(kx) u(x) dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \hat{u}_{\text{dispari}}(k), \quad (\text{V.77})$$

$$(\mathcal{F}_c u)(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(kx) u(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{u}_{\text{pari}}(k), \quad (\text{V.78})$$

dove u_{pari} e u_{dispari} sono le funzioni pari e dispari definite su \mathbb{R} tali che $u_{\text{pari}}(x) + u_{\text{dispari}}(x) = u(x)$ per $x \in \mathbb{R}^+$. È facile controllare le seguenti uguaglianze:

$$(\mathcal{F}_s^{-1} v)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(kx) v(k) dk, \quad (\text{V.79})$$

$$(\mathcal{F}_c^{-1} v)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(kx) v(k) dk, \quad (\text{V.80})$$

mentre

$$(\mathcal{F}_s u')(k) = -k(\mathcal{F}_c u)(k), \quad (\mathcal{F}_s u'')(k) = -k^2(\mathcal{F}_s u)(k) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} k u(0), \quad (\text{V.81})$$

$$(\mathcal{F}_c u')(k) = k(\mathcal{F}_s u)(k) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} u(0), \quad (\mathcal{F}_c u'')(k) = -k^2(\mathcal{F}_c u)(k) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} u'(0). \quad (\text{V.82})$$

In altre parole, abbiamo i diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccccccc} L^2(\mathbb{R}^+, dx) & \xrightarrow{L=-(d^2/dx^2)} & L^2(\mathbb{R}^+, dx) & L^2(\mathbb{R}^+, dx) & \xrightarrow{L=-(d^2/dx^2)} & L^2(\mathbb{R}^+, dx) & \\ \mathcal{F}_s \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}_s & \mathcal{F}_c \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}_c & \\ L^2(\mathbb{R}^+, dk) & \xrightarrow{\Lambda=k^2} & L^2(\mathbb{R}^+, dk) & L^2(\mathbb{R}^+, dk) & \xrightarrow{\Lambda=k^2} & L^2(\mathbb{R}^+, dk) & \\ & & \text{Condizioni di Dirichlet} & & & \text{Condizioni di Neumann} & \end{array}$$

Per l'equazione delle onde con la condizione di Dirichlet [risp., Neumann] applichiamo la trasformata di Fourier seno [risp., coseno] e arriviamo ai sistemi iniziali

$$\begin{cases} \hat{u}_s''(k, t) = -k^2 \hat{u}_s(k, t) + \hat{f}_s(k, t), \\ \hat{u}_s(k, 0) = \hat{u}_{0s}(k), \\ \hat{u}_s'(k, 0) = \hat{u}_{1s}(k), \end{cases} \quad (\text{V.83})$$

per il caso di Dirichlet ed ai sistemi iniziali

$$\begin{cases} \hat{u}_c''(k, t) = -k^2 \hat{u}_c(k, t) + \hat{f}_c(k, t), \\ \hat{u}_c(k, 0) = \hat{u}_{0c}(k), \\ \hat{u}_c'(k, 0) = \hat{u}_{1c}(k), \end{cases} \quad (\text{V.84})$$

per il caso di Neumann. Le soluzioni dei sistemi iniziali sono

$$\hat{u}_s(k, t) = \cos(kt) \hat{u}_{0s}(k) + \frac{\sin(kt)}{k} \hat{u}_{1s}(k) + \int_0^t \frac{\sin(k(t-\tau))}{k} \hat{f}_s(k, \tau) d\tau \quad (\text{V.85})$$

per il caso di Dirichlet e

$$\hat{u}_c(k, t) = \cos(kt) \hat{u}_{0c}(k) + \frac{\sin(kt)}{k} \hat{u}_{1c}(k) + \int_0^t \frac{\sin(k(t-\tau))}{k} \hat{f}_c(k, \tau) d\tau \quad (\text{V.86})$$

per il caso di Neumann.

Per l'equazione del calore con la condizione di Dirichlet [risp., Neumann] applichiamo la trasformata di Fourier seno [risp., coseno] e arriviamo ai sistemi iniziali

$$\begin{cases} \hat{u}_s'(k, t) = -k^2 \hat{u}_s(k, t) + \hat{f}_s(k, t), \\ \hat{u}_s(k, 0) = \hat{u}_{0s}(k), \end{cases} \quad (\text{V.87})$$

per il caso di Dirichlet ed ai sistemi iniziali

$$\begin{cases} \hat{u}_c'(k, t) = -k^2 \hat{u}_c(k, t) + \hat{f}_c(k, t), \\ \hat{u}_c(k, 0) = \hat{u}_{0c}(k), \end{cases} \quad (\text{V.88})$$

per il caso di Neumann. Le soluzioni dei sistemi iniziali sono

$$\hat{u}_s(k, t) = e^{-k^2 t} \hat{u}_{0s}(k) + \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} \hat{f}_s(k, \tau) d\tau \quad (\text{V.89})$$

per il caso di Dirichlet e

$$\hat{u}_c(k, t) = e^{-k^2 t} \hat{u}_{0c}(k) + \int_0^t e^{-k^2(t-\tau)} \hat{f}_c(k, \tau) d\tau \quad (\text{V.90})$$

per il caso di Neumann. Quindi

$$u(x, t) = \int_0^\infty \mathcal{G}(x, y; t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_0^\infty \mathcal{G}(x, y; t - \tau) f(y, \tau) dy d\tau, \quad (\text{V.91})$$

dove⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y; t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-k^2 t} \sin(kx) \sin(ky) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-k^2 t} \{-\cos(k(x+y)) + \cos(k(x-y))\} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[-e^{-(x+y)^2/4t} + e^{-(x-y)^2/4t} \right] \end{aligned} \quad (\text{V.92})$$

per il caso di Dirichlet e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y; t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-k^2 t} \cos(kx) \cos(ky) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-k^2 t} \{\cos(k(x+y)) + \cos(k(x-y))\} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[e^{-(x+y)^2/4t} + e^{-(x-y)^2/4t} \right] \end{aligned} \quad (\text{V.93})$$

per il caso di Neumann.

c. $Lu = -\Delta u$ su \mathbb{R}^n . Consideriamo $Lu = -\Delta u$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. In tal caso la trasformata di Fourier \mathcal{F} (che ha la proprietà $\|\mathcal{F}u\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|u\|_2$) converte l'operatore L nella moltiplicazione Λ da $|k|^2$, cioè

$$(\Lambda v)(k) = (\mathcal{F}L\mathcal{F}^{-1}v)(k) = |k|^2 v(k), \quad k \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{V.94})$$

In altre parole, abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^n, dx) & \xrightarrow{L=-\Delta} & L^2(\mathbb{R}^n, dx) \\ \mathcal{F} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F} \\ L^2(\mathbb{R}^n, dk) & \xrightarrow{\Lambda=|k|^2} & L^2(\mathbb{R}^n, dk) \end{array} \quad (\text{V.95})$$

⁴Si utilizzi la formula $\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-k^2 t} \cos(kz) dk = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-z^2/4t}$. Vedi [1], Eq. 7.4.6.

Per l'equazione del calore la trasformata di Fourier conduce ai sistemi iniziali

$$\hat{u}'(k, t) = -|k|^2 \hat{u}(k, t) + \hat{f}(k, t), \quad (\text{V.96})$$

$$\hat{u}(k, 0) = \hat{u}_0(k), \quad (\text{V.97})$$

dove $k \in \mathbb{R}^n$ è soltanto un parametro. La soluzione del problema (V.96)-(V.97) è elementare:

$$\hat{u}(k, t) = e^{-|k|^2 t} \hat{u}_0(k) + \int_0^t e^{-|k|^2(t-\tau)} \hat{f}(k, \tau) d\tau. \quad (\text{V.98})$$

Quindi

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik \cdot x} \left[e^{-|k|^2 t} \hat{u}_0(k) + \int_0^t e^{-|k|^2(t-\tau)} \hat{f}(k, \tau) d\tau \right] dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}(x-y; t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}(x-y; t-\tau) f(y, \tau) du d\tau, \end{aligned} \quad (\text{V.99})$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik \cdot x} e^{-|k|^2 t} dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-|x|^2/4t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(k + \frac{ix}{2t}) \cdot (k + \frac{ix}{2t}) t} dk = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \right)^n e^{-|x|^2/4t}. \end{aligned} \quad (\text{V.100})$$

Per l'equazione delle onde l'applicazione della trasformata di Fourier \mathcal{F} conduce ai sistemi iniziali

$$\hat{u}''(k, t) = -|k|^2 \hat{u}(k, t) + \hat{f}(k, t), \quad (\text{V.101})$$

$$\hat{u}(k, 0) = \hat{u}_0(k), \quad (\text{V.102})$$

$$\hat{u}'(k, 0) = \hat{u}_1(k), \quad (\text{V.103})$$

dove $k \in \mathbb{R}^n$ è soltanto un parametro. La soluzione del sistema (V.101)-(V.103) è elementare:

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}_0(k) \cos(|k|t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(|k|t)}{|k|} + \int_0^t \frac{\sin(|k|(t-\tau))}{|k|} \hat{f}(k, \tau) d\tau, \quad (\text{V.104})$$

e dunque

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\hat{u}_0(k) \cos(|k|t) + \hat{u}_1(k) \frac{\sin(|k|t)}{|k|} \right] e^{-ik \cdot x} dk \\ &+ \int_0^t \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin(|k|(t-\tau))}{|k|} \hat{f}(k, \tau) e^{-ik \cdot x} dx d\tau. \end{aligned} \quad (\text{V.105})$$

Si trova la (V.57), dove

$$\mathcal{H}(x, y; t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin(|k|t)}{|k|} e^{-ik \cdot (x-y)} dk, \quad (\text{V.106})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, y; t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \cos(|k|t) e^{-ik \cdot (x-y)} dk. \quad (\text{V.107})$$

3.4 Impostazione generale

Sia L un operatore di Sturm-Liouville sullo spazio di Hilbert $L^2(G; w dx)$ tale che $w(x)$ è un peso positivo quasi ovunque. Supponiamo che lo spettro dell'operatore lineare $w^{-1}L$ sullo spazio $L^2(G; w dx)$ sia non negativo (in parte autovalori e in parte spettro continuo).⁵ In tal caso si cerchi uno spazio di Hilbert $L^2(\mu)$ per un'opportuna misura di Borel μ , una funzione μ -misurabile e non negativa σ e un operatore unitario $\mathcal{F} : L^2(G; w dx) \rightarrow L^2(\mu)$ tale che $\Lambda = \mathcal{F}L\mathcal{F}^{-1}$ è l'operatore di moltiplicazione per la funzione σ . In altre parole, abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} L^2(G, w dx) & \xrightarrow{L} & L^2(G, w dx) \\ \mathcal{F} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F} \\ L^2(\mu) & \xrightarrow{\Lambda = \sigma(\cdot)} & L^2(\mu) \end{array}$$

Per l'equazione del calore risultano i sistemi a valori iniziali

$$\begin{aligned} \hat{u}'(\xi, t) &= -\sigma(\xi)\hat{u}(\xi, t) + \hat{f}(\xi, t), \\ \hat{u}(\xi, 0) &= \hat{u}_0(\xi), \end{aligned}$$

che ha la soluzione

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-\sigma(\xi)t} \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-\sigma(\xi)(t-\tau)} \hat{f}(\xi, \tau) d\tau.$$

Quindi

$$u(x, t) = \int \mathcal{G}(x, y; t) u_0(y) w(y) dy + \int_0^t \int \mathcal{G}(x, y; t - \tau) f(y, \tau) w(y) dy d\tau,$$

dove

$$\mathcal{G}(x, y; t) = \int e^{-\sigma(\xi)t} \varphi(x, \xi) \overline{\varphi(y, \xi)} d\mu(\xi).$$

⁵In questo caso supponiamo che l'insieme di tutte i λ per cui $(w - L)^{-1}$ non ha l'inverso limitato in $L^2(G; w dx)$ è un sottoinsieme di \mathbb{R}^+ .

La trasformata \mathcal{F} ha la forma

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \int_G \varphi(x, \xi)u(x)w(x) dx,$$

$$(\mathcal{F}^{-1}v)(x) = \int \overline{\varphi(x, \xi)}v(\xi) d\mu(\xi).$$

In altre parole,

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \text{identità} \iff \int \varphi(y, \xi)\overline{\varphi(x, \xi)} d\mu(\xi) = \delta(x - y),$$

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \text{identità} \iff \int_G \varphi(x, \xi)\overline{\varphi(x, \eta)}w(x) dx = \delta(\xi - \eta).$$

Tabella V.1: Impostazione per alcuni esempi dove $Lu = -u''$ e $w(x) \equiv 1$.

G	condizioni al contorno	misura μ	$\sigma(\xi)$	$\varphi(x, \xi)$
\mathbb{R}	nessuna	dk su \mathbb{R}	k^2	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$
\mathbb{R}^+	$u(0) = 0$	dk su \mathbb{R}^+	k^2	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$
\mathbb{R}^+	$u'(0) = 0$	dk su \mathbb{R}^+	k^2	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kx)$
$(0, a)$	$u(0) = u(a) = 0$	$\mu(n) = 1$ su \mathbb{N}	$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$	$\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$
$(0, a)$	$u'(0) = u'(a) = 0$	$\mu(n) = 1$ su $\mathbb{N} \cup \{0\}$	$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$	$\sqrt{\frac{2-\delta_{n0}}{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$
$(0, a)$	$u(0) = u'(a) = 0$	$\mu(n) = 1$ su $\mathbb{N} \cup \{0\}$	$\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a}\right)^2$	$\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\right)$
\mathbb{R}^n	nessuna	dk su \mathbb{R}^n	$ k ^2$	$(2\pi)^{-n/2}e^{ik \cdot x}$

Discutiamo ora un esempio per cui il peso $w(x) \neq 1$. Sia $G = (0, a)$, $w(x) = x$, $Lu = -(xu')'$, $u(0^+)$ finito e $u(a) = 0$. In tal caso gli autovalori sono i numeri λ per cui l'equazione

$$Lu = \lambda wu \iff \begin{cases} -(xu')' = \lambda x u(x) \text{ per } x \in (0, a), \\ \text{mentre } u(0^+) \text{ è finito e } u(a) = 0 \end{cases}$$

ha una soluzione non banale u in $L^2((0, a); x dx)$. Si vede facilmente che gli autovalori e autofunzioni sono (per $n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_{0,n}}{a}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{a J'_0(\mu_{0,n})} J_0\left(\frac{x\mu_{0,n}}{a}\right),$$

dove $0 < \mu_{0,1} < \mu_{0,2} < \dots$ sono gli zeri positivi della funzione di Bessel J_0 di ordine zero. Le autofunzioni $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ formano una base ortonormale di $L^2((0, a); x dx)$.

Tabella V.2: Impostazione per alcuni esempi dove $w(x) \neq 1$.

G $w(x)$	operatore di Sturm-Liouville e condizioni al contorno	misura μ	$\sigma(\xi)$	$\varphi(x, \xi)$
$(0, a)$ $w(x) = x$	$Lu = -(xu')'$ $u(0^+)$ finito, $u(a) = 0$	$\mu(n) = 1$ su \mathbb{N}	$\left(\frac{\mu_{0,n}}{a}\right)^2$	$\frac{\sqrt{2}}{a J_0'(\mu_{0,n})} J_0\left(\frac{x\mu_{0,n}}{a}\right)$

Capitolo VI

EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER

In questo capitolo discuteremo l'equazione di Schrödinger. Prima verranno introdotti l'equazione di Schrödinger, i suoi stati limite e il problema di scattering. Poi verrà discussa l'equazione di Schrödinger per i potenziali radiali.

1 Equazione di Schrödinger

L'equazione di Schrödinger descrive (nell'ambito della meccanica quantistica non relativistica) la probabilità che una particella si trovi in una regione dello spazio al momento t . Se m è la massa della particella e $\hbar = h/2\pi$ la costante di Planck, si ha per la funzione onda $\psi(x, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(x)\psi(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0; \quad (\text{VI.1})$$

$$\psi(x, t = 0) = \psi_0(x), \quad (\text{VI.2})$$

con condizioni al contorno. La funzione $V(x)$ è reale e rappresenta il potenziale. Scegliendo unità fisiche tali che $\hbar = 1$ e $2m = 1$, risulta invece della (VI.1)

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta \psi + V(x)\psi(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0. \quad (\text{VI.3})$$

Se $E \subset \mathbb{R}^3$ è misurabile, $\int_E |\psi(x, t)|^2 dx$ (sotto la condizione di normalizzazione $\psi(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$) è la probabilità di trovare la particella in E al momento t .

Noi studiamo esclusivamente il problema stazionario, dove l'energia λ prende il posto dell'operatore $i(\partial/\partial t)$, cioè

$$-\Delta \psi + V(x)\psi(x) = k^2 \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (\text{VI.4})$$

dove $\lambda = k^2$ con $\text{Im } k \geq 0$. Ci sono due problemi di rilevante importanza:

1. il problema degli stati limite: $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$. In tal caso l'energia $\lambda = k^2$ è un valore discreto negativo.
2. il problema di scattering: in tal caso si impone la condizione di Sommerfeld

$$\psi(k, x) = e^{ik\theta \cdot x} + \frac{e^{ik|x|}}{|x|} A\left(k, \theta, \frac{x}{|x|}\right) + o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

dove $A(k, \theta, \theta')$ è l'ampiezza (come funzione dell'energia $\lambda = k^2$ e le direzioni $\theta, \theta' \in S^2$); $e^{ik\theta \cdot x}$ rappresenta un'onda piana nella direzione θ . Nel problema di scattering si ha l'energia $\lambda > 0$.

In quest'ultimo caso la funzione onda $\psi(k, x)$ non appartiene a $L^2(\mathbb{R}^3)$ e infatti soddisfa alla *condizione di Sommerfeld*

$$\begin{aligned} \psi(k, x) &= e^{ik\theta \cdot x} + \psi_s(x) \\ &= e^{ik\theta \cdot x} + \frac{e^{ik|x|}}{|x|} A\left(k, \theta, \frac{x}{|x|}\right) + o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

dove $A(k, \theta, \theta')$ è l'ampiezza e $k > 0$. Ovviamente il potenziale $V(x)$ deve essere localmente sommabile (cioè, $V \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$) e tendere a zero abbastanza rapidamente se $|x| \rightarrow \infty$.¹ Cercando la cosiddetta *funzione di Green* $\mathcal{G}(k; x, x')$ tale che

$$(\Delta + k^2)\mathcal{G}(k; x, x') = -4\pi\delta(x - x'),$$

ciò scegliendo

$$\mathcal{G}(k; x, x') = \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|},$$

si ottiene facilmente

$$\psi_s(x) = -\frac{1}{4\pi} \int \mathcal{G}(k; x, x') V(x') \psi(x') dx'.$$

Quindi

$$\psi(x) = e^{ik\theta \cdot x} - \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{G}(k; x, x') V(x') \psi(x') dx'.$$

Per calcolare ψ dal potenziale si può risolvere l'equazione precedente per iterazione. Facendo una singola iterazione si arriva alla cosiddetta *approssimazione di Born*

$$\psi(x) \simeq e^{ik\theta \cdot x} - \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{G}(k; x, x') V(x') e^{ik\theta \cdot x'} dx'.$$

¹I potenziali di Coulomb $V(x) = \frac{\text{cost.}}{|x|}$ non conducono ad una teoria di scattering quantistica semplice, poichè non decadono abbastanza rapidamente se $|x| \rightarrow \infty$.

2 Equazione di Schrödinger Radiale

In problemi in cui c'è la simmetria sferica il potenziale ha la proprietà

$$V(x) = V(r), \quad r = |x|.$$

Un tale potenziale si dice *radiale*.

a. Trovare i stati limite. Per studiarne i stati limite (dove l'energia $\lambda < 0$) si esprime l'equazione di Schrödinger in coordinate sferiche:

$$\frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - V(r)\psi = -\lambda\psi,$$

dove $x = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) \in \mathbb{R}^3$. Sostituendo

$$\psi(x) = R(r)X(\varphi, \theta)$$

e moltiplicando da $r^2/R(r)X(\varphi, \theta)$ si ottiene

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{X(\varphi, \theta)} \left[\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} \right] - r^2 V(r) = -\lambda r^2.$$

Come al solito, seguono le seguenti equazioni differenziali:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[-\frac{C}{r^2} + \lambda - V(r) \right] R(r) = 0; \quad (\text{VI.5})$$

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} = -CX(\varphi, \theta), \quad (\text{VI.6})$$

dove C è una costante. L'equazione (VI.6) si chiama spesso l'equazione di Beltrami.

Secondo la teoria esposta nella § 3.1 esiste una soluzione non banale della (VI.6) se e solo se $C = l(l+1)$ per qualche $l = 0, 1, 2, \dots$, ed in tal caso $X(\varphi, \theta)$ è una combinazione lineare delle funzioni sferiche $Y_l^m(\varphi, \theta)$, dove $m = -l, \dots, l$. Infatti, eseguendo un'ulteriore separazione delle variabili nella (VI.6), $X(\varphi, \theta) = \mathcal{P}(\xi)\Theta(\theta)$ dove $\xi = \cos \varphi$ e $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$, risultano

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ c_1 \cos m\theta + c_2 \sin m\theta, & m = 1, 2, 3, \dots; \end{cases}$$

$$\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{d\mathcal{P}}{d\xi} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] \mathcal{P}(\xi). \quad (\text{VI.7})$$

La (VI.7) si dice equazione differenziale per le funzioni di Legendre associate: $\mathcal{P}(\xi) \sim \mathcal{P}_l^m(\xi)$, dove $l = m, m+1, m+2, \dots$ e $m = 0, 1, 2, \dots$

Discutiamo ora la (VI.5). Sostituendo $R(r) = r^\alpha S(r)$ nella (VI.5) [con $C = l(l+1)$] per un'opportuna α (da stabilire successivamente) e dividendo da r^α , si trova

$$\frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{2(\alpha+1)}{r} \frac{dS}{dr} + \left[\frac{\alpha(\alpha+1) - l(l+1)}{r^2} + \lambda - V(r) \right] S(r) = 0. \quad (\text{VI.8})$$

Per far somigliare la (VI.8) all'equazione di Bessel si scelga α tale che $2(\alpha+1) = 1$, cioè $\alpha = -1/2$:

$$\frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} + \left[-\frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2} + \lambda - V(r) \right] S(r) = 0. \quad (\text{VI.9})$$

Per far sparire il termine con la derivata prima dalla (VI.8), ci vuole $\alpha = -1$. Quindi per $S(r) = rR(r)$ abbiamo

$$\frac{d^2 S}{dr^2} + \left[\frac{-l(l+1)}{r^2} + \lambda - V(r) \right] S(r) = 0. \quad (\text{VI.10})$$

Per $\alpha = 0$ otteniamo dalla (VI.8)

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[-\frac{l(l+1)}{r^2} + \lambda - V(r) \right] R(r) = 0, \quad (\text{VI.11})$$

dove $l = 0, 1, 2, \dots$. Noi imponremo le seguenti due condizioni al contorno:

$$\begin{cases} R(r) = O(r^l), & r \rightarrow 0^+ \\ \int_0^\infty r |R(r)|^2 dr < +\infty. \end{cases} \quad (\text{VI.12})$$

I seguenti casi sono di rilevante interesse:

1. La buca di potenziale, dove $V(r) = -V_0 < 0$ per $0 < r < r_0$ e $V(r) = 0$ per $r > r_0$.
2. L'oscillatore armonico, dove $V(r) = (\gamma/2)r^2$ per una costante $\gamma > 0$.
3. L'atomo di idrogeno, dove $V(r) = -e^2/r$ per e la carica dell'elettrone.

b. Il problema di scattering. Nel corrispondente problema di scattering l'ampiezza dipende da k e dall'angolo tra le direzioni θ e θ' :

$$A(k, \theta, \theta') = A(k, \theta \cdot \theta').$$

In tal caso bisogna separare le variabili in coordinate cilindriche, dove la direzione di θ prende il posto dall'asse z positivo.

Per $V \equiv 0$ l'equazione di Schrödinger per $E = k^2$ con $k > 0$ ha la soluzione generale [8]

$$\psi(x) = \text{cost.}_1 f_l(kr) + \text{cost.}_2 g_l(kr),$$

dove

$$f_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(\rho) = \rho j_l(\rho), \quad g_l(\rho) = (-1)^l \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_{-(l+\frac{1}{2})}(\rho) = -\rho n_l(\rho),$$

dove $l = 0, 1, 2, \dots$ e j_l e n_l si chiamano funzioni di Bessel sferiche di prima e seconda specie. Sviluppando l'onda piana

$$e^{ik\theta \cdot x} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{l,m} \frac{f_l(kr)}{kr} Y_l^m(\theta, \varphi),$$

si trova per l'ampiezza

$$f(k; \theta \cdot \theta') \stackrel{\text{def}}{=} A(k, \theta, \theta') = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) P_l(\theta \cdot \theta'),$$

dove $\delta_l(k)$ si chiamano *fasi di scattering*.

2.1 La buca di potenziale

In tal caso

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & 0 \leq r < r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \quad (\text{VI.13})$$

dove $V_0 > 0$. Sostituendo $R(r) = r^{-1/2} S(r)$ otteniamo [Vedi (VI.9)]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} + \left[V_0 - \kappa^2 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{r^2} \right] S(r) &= 0, & 0 < r < r_0, \\ \frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} - \left[\kappa^2 + \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{r^2} \right] S(r) &= 0, & r > r_0, \end{aligned} \quad (\text{VI.14})$$

dove $\lambda = -\kappa^2$ per $\kappa > 0$. Ovviamente, per $r > r_0$ la (VI.14) è l'equazione immaginaria di Bessel di ordine $l + \frac{1}{2}$ nella variabile κr . Siccome deve tendere a zero se $r \rightarrow \infty$, si trova

$$S(r) \sim K_{l+\frac{1}{2}}(\kappa r), \quad r > r_0, \quad (\text{VI.15})$$

dove $K_\nu(z)$ è la funzione di MacDonald di ordine ν . Per $\nu, z > 0$ La funzione di MacDonald $K_\nu(z)$ è decrescente.

Per $0 < r < r_0$ la situazione è più complicata. Siccome $S(0^+)$ esiste, risulta per $0 < r < r_0$

$$S(r) \sim \begin{cases} J_{l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{V_0 - \kappa^2}), & V_0 > \kappa^2, \\ r^{l+\frac{1}{2}}, & V_0 = \kappa^2, \\ I_{l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{\kappa^2 - V_0}), & V_0 < \kappa^2, \end{cases} \quad (\text{VI.16})$$

dove $J_\nu(z)$ è la funzione di Bessel di ordine ν e $I_\nu(z)$ è la funzione di Bessel immaginaria di ordine ν .

Per trovare i stati limite richiediamo che la derivata logaritmica della S (cioè, S'/S) sia continua in $r = r_0$. Grazie al decadimento della funzione di MacDonald, si vede subito che $S'(r)/S(r)$ ha un limite negativo se $r \rightarrow (r_0)^+$. D'altra parte, $r^{l+\frac{1}{2}}$ e la funzione di Bessel immaginaria sono crescenti per $r > 0$, mentre la funzione di Bessel stessa è oscillatoria. Quindi gli stati limiti possono esistere soltanto per $V_0 > \kappa^2$. In tal caso

$$S(r) \sim J_{l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{V_0 - \kappa^2}), \quad (\text{VI.17})$$

dove

$$\kappa r_0 \frac{K'_{l+\frac{1}{2}}(\kappa r_0)}{K_{l+\frac{1}{2}}(\kappa r_0)} = r_0 \sqrt{V_0 - \kappa^2} \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})}{J_{l+\frac{1}{2}}(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})}. \quad (\text{VI.18})$$

Le energie $\lambda = -\kappa^2$ corrispondenti agli stati limite si trovano dal numero finito di zeri della (VI.18) per $0 < \kappa < \sqrt{V_0}$; ci sono zeri per soltanto un numero finito di $l = 0, 1, 2, \dots$

Per $l = 0$ abbiamo

$$K_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad J_{\frac{1}{2}}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2w}} \sin(w).$$

Allora (VI.18) si riduce all'identità

$$\frac{\tan(\sqrt{V_0 r_0^2 - z^2})}{\sqrt{V_0 r_0^2 - z^2}} = -\frac{1}{1+z},$$

dove $z = \kappa r_0$. Gli zeri $z = \kappa r_0 \in (0, r_0\sqrt{V_0})$ si ottengono graficamente.

Per $l = 0$ si può ottenere i risultati in modo più semplice senza utilizzare le funzioni di Bessel. Partendo dall'equazione di Schrödinger (VI.10) per $V(r)$ in (VI.13), otteniamo per $S(r) = rR(r)$

$$\begin{cases} S''(r) + (V_0 - \kappa^2)S(r) = 0, & 0 < r < r_0, \\ S'' - \kappa^2 S(r) = 0, & r > r_0, \end{cases} \quad (\text{VI.19})$$

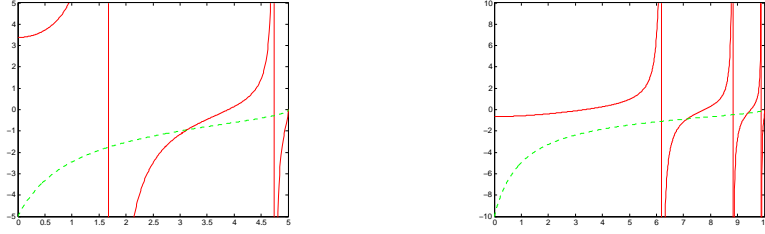


Figura VI.1: Per $l = 0$ e per $r_0\sqrt{V_0} = 5$ (pannello sinistro) o 10 (pannello destro) vengono calcolati graficamente i valori di $z = \kappa r_0$ per cui l'equazione di Schrödinger per la buca sferica ha stato limite.

dove $\int_0^\infty |S(r)|^2 dr < \infty$, $S(0) = 0^2$ e S è di classe C^1 in $r = r_0$. Per $r > r_0$ risulta $S(r) \sim e^{-\kappa r}$. Quindi ci vuole $(S'/S)(r_0) = -\kappa < 0$.

Se $0 \leq V_0 < \kappa^2$, per $0 < r < r_0$ risulta $S(r) \sim \sinh(r\sqrt{\kappa^2 - V_0})$ [grazie alla condizione $S(0) = 0$] per $0 < r < r_0$ e quindi è impossibile avere $(S'/S)(r_0) < 0$. Per $\kappa = \sqrt{V_0}$ risulta $S(r) \sim r$ [grazie alla condizione $S(0) = 0$] e quindi $(S'/S)(r_0) = (1/r_0) > 0$. Di conseguenza, siamo costretti a limitarci al caso $0 < \kappa < \sqrt{V_0}$. In tal caso la condizione $S(0) = 0$ conduce a $S(r) \sim \sin(r\sqrt{V_0 - \kappa^2})$ per $0 < r < r_0$. Dalla condizione di derivabilità continua in $r = r_0$ si trova

$$\sqrt{V_0 - \kappa^2} \frac{\cos(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})}{\sin(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})} = -\kappa.$$

Per studiare quest'ultima equazione, poniamo $\xi = r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2}$ (che appartiene all'intervallo $(0, r_0\sqrt{V_0})$) e scriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{\xi}{\tan(\xi)} = -\sqrt{V_0 r_0^2 - \xi^2}, \quad 0 < \xi < r_0\sqrt{V_0},$$

²Una condizione tecnica mai spiegata dal punto di vista fisico per costringere ad una successione finita di autovalori.

oppure

$$\tan(\xi) = -\frac{\xi}{\sqrt{V_0 r_0^2 - \xi^2}}, \quad 0 < \xi < r_0 \sqrt{V_0}.$$

Per $n = 1, 2, 3, \dots$ e $(n - \frac{1}{2})\pi < r_0 \sqrt{V_0} \leq (n + \frac{1}{2})\pi$ ci sono n soluzioni ξ di quest'equazione e quindi n stati limite.

2.2 Oscillatore armonico

a. Utilizzando le coordinate sferiche. In tal caso

$$V(r) = \frac{1}{2}\gamma r^2, \quad (\text{VI.20})$$

dove $\gamma > 0$ è una costante. Ponendo $c = \sqrt{\gamma/8}$ e $R(r) = e^{-cr^2} \phi(r)$, la (VI.11) si riduce all'equazione differenziale

$$\phi''(r) + \left(\frac{2}{r} - 4cr\right) \phi'(r) + \left(k^2 - 6c - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) \phi(r) = 0. \quad (\text{VI.21})$$

Sostituendo la serie di potenze

$$\phi(r) = r^\alpha \sum_{s=0}^{\infty} c_s r^s, \quad (\text{VI.22})$$

dove α è un parametro da stabilire, troviamo

$$\sum_{s=0}^{\infty} [\{(\alpha + s)(\alpha + s - 1) + 2(\alpha + s) - l(l + 1)\}c_s + \{(k^2 - 6c) - 4c(\alpha + s - 2)\}c_{s-2}] r^{\alpha+s-2} = 0,$$

dove $c_{-1} = c_{-2} = 0$. Supponendo che il coefficiente di $r^{\alpha-2}$ sia diverso da zero, si trova

$$\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha - l(l + 1) = 0,$$

e quindi $\alpha = l$ oppure $\alpha = -(l + 1)$. La condizione al contorno (VI.12) se $r \rightarrow 0^+$ implica che $\alpha = l$. In tal caso $c_1 = 0$ e

$$s(s + 2l + 1)c_s + \{(k^2 - 6c) - 4c(s + l - 2)\}c_{s-2} = 0. \quad (\text{VI.23})$$

Dunque $c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0$ e

$$c_s = \frac{4c(s + l - 2) - (k^2 - 6c)}{s(s + 2l + 1)} c_{s-2},$$

dove $s = 2, 4, 6, \dots$. Il rapporto $c_s r^2 / c_{s-2} \sim (4cr^2/s)$ se $s \rightarrow +\infty$. Quindi scegliamo k^2 tale che $c_s = 0$ per qualche $s = 2, 4, 6, \dots$, cioè

$$k^2 = 4c(s + l - 2) + 6c, \quad s = 2, 4, 6, \dots$$

Quindi abbiamo trovato gli autovalori e le autofunzioni

$$\begin{cases} k_{l,n}^2 = 2c(2n + 3), & l = n, n - 2, n - 4, \dots, l = 0, 1, 2, \dots, \\ \psi_{l,n}(r, \theta, \varphi) = e^{-cr^2} \phi_{l,n}(r) Y_l^m(\theta, \varphi), & m = -l, -l + 1, \dots, l, \end{cases} \quad (\text{VI.24})$$

dove $\phi_{l,n}(r) = r^l v_{l,n}(r)$ e $v_{l,n}(r)$ è un polinomio in r^2 di grado $n - l$. Quel polinomio soddisfa l'equazione

$$r^2 v''(r) + 2r(l + 1 - 2cr^2)v'(r) + 4c(n - l)r^2 v(r) = 0.$$

Ponendo $t = 2cr^2$ e $w(t) = v(r)$ [tali che $rv'(r) = 2tw'(t)$ e $r^2 v''(r) = 4t^2 w''(t) + 2tw'(t)$] otteniamo l'equazione differenziale

$$tw''(t) + \left(l + \frac{3}{2} - t\right)w'(t) + \frac{1}{2}(n - l)w(t) = 0, \quad (\text{VI.25})$$

dove $n - l = 0, 2, 4, \dots$ e $w(t)$ è un polinomio in t di grado $\frac{1}{2}(n - l)$.

b. Utilizzando le coordinate cartesiane. Siccome $V(r) = \frac{\gamma}{2}r^2 = \frac{\gamma}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$, l'equazione di Schrödinger è anche separabile in coordinate Cartesiane. Infatti, scrivendo $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ otteniamo le tre equazioni

$$\begin{cases} X''(x) + \left(k_x^2 - \frac{\gamma x^2}{2}\right)X(x) = 0, \\ Y''(y) + \left(k_y^2 - \frac{\gamma y^2}{2}\right)Y(y) = 0, \\ Z''(z) + \left(k_z^2 - \frac{\gamma z^2}{2}\right)Z(z) = 0, \end{cases} \quad (\text{VI.26})$$

dove $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Studiamo ora una delle equazioni in una variabile. Ponendo $X(x) = e^{-cx^2} \phi(x)$ per $c = \sqrt{\gamma/8}$, l'equazione $X''(x) + [k_x^2 - (\gamma x^2/2)]X(x) = 0$ si riduce all'equazione

$$\phi''(x) - 4cx\phi'(x) + (k_x^2 - 2c)\phi(x) = 0. \quad (\text{VI.27})$$

Sostituendo $\phi(x) = x^\alpha \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s$, otteniamo

$$\sum_{s=0}^{\infty} [(\alpha + s)(\alpha + s - 1)c_s + \{(k_x^2 - 2c) - 4c(\alpha + s - 2)\}c_{s-2}] x^{\alpha+s-2} = 0, \quad (\text{VI.28})$$

dove $c_{-1} = c_{-2} = 0$. Scegliendo $\alpha = 0$, troviamo $c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0$ e

$$\frac{c_s}{c_{s-2}} = \frac{4c(s-2) - (k_x^2 - 2c)}{s(s-1)}, \quad s = 2, 4, 6, \dots,$$

risultando in polinomi in x di grado $n = 0, 2, 4, \dots$ se $k_x^2 = 2c(2n+1)$. Scegliendo $\alpha = 1$, troviamo $c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0$ e

$$\frac{c_s}{c_{s-2}} = \frac{4c(s-1) - (k_x^2 - 2c)}{s(s+1)}, \quad s = 2, 4, 6, \dots,$$

risultando in polinomi in x di grado $n = 1, 3, 5, \dots$ se $k_x^2 = 2c(2n+1)$. Insieme troviamo le seguenti soluzioni $X_n(x) = \phi_n(x)e^{-cx^2}$, dove $\phi_n(x)$ è un polinomio di grado $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ e $k_x^2 = 2c(2n+1)$. Raccogliendo X, Y e Z risulta

$$\begin{cases} k^2 = 2c(2n+3), & n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ \psi(x, y, z) = e^{-c(x^2+y^2+z^2)}\phi_{n_1}(x)\phi_{n_2}(y)\phi_{n_3}(z), \end{cases} \quad (\text{VI.29})$$

dove $n = n_1 + n_2 + n_3$.

c. Analisi dei polinomi. Sostituendo $z = x\sqrt{2c}$ e $v(z) = \phi(x)$ si arriva all'equazione differenziale di Hermite. Quindi i polinomi $\phi_n(x)$ nella (VI.29) sono proporzionali a $H_n(x\sqrt{2c})$, dove H_n è il polinomio di Hermite di grado n . Vale la relazione d'ortogonalità

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x\sqrt{2c})H_m(x\sqrt{2c})e^{-2cx^2} dx = \frac{2^n(n!)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2c}} \delta_{n,m},$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

I polinomi $w_m(t)$ ($m = n - l = 0, 1, 2, \dots$) soddisfano l'equazione differenziale

$$tw_m''(t) + \left(l + \frac{3}{2} - t\right)w_m'(t) + mw_m(t) = 0.$$

Quest'ultima equazione coincide con l'equazione differenziale di Laguerre per $\alpha = l + \frac{1}{2}$. Quindi $w_m(t)$ è proporzionale al polinomio di Laguerre $L_m^{(l+\frac{1}{2})}(t)$. In altre parole,

$$\phi_{l,n}(r) = \text{cost.} r^l L_{n-l}^{(l+\frac{1}{2})}(2cr^2).$$

Calcoliamo ora il numero N_n di autofunzioni linearmente indipendenti corrispondenti allo stesso livello di energia, cioè allo stesso intero $n = 0, 1, 2, \dots$. Dalla derivazione in coordinate cartesiane segue che N_n è uguale al numero di

punti (n_1, n_2, n_3) con coordinate intere non negative per cui $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Dalla derivazione in coordinate sferiche segue che

$$N_n = \begin{cases} \#\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}_+ : n_1 + n_2 + n_3 = n\} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \\ \sum_{\substack{l=0,1,\dots,n \\ n-l \text{ pari}}} (2l+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \end{cases}$$

dove ci rendiamo conto del fatto che ad ogni $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ corrispondono $2l + 1$ autofunzioni linearmente indipendenti con lo stesso livello di energia.

2.3 Atomo d'idrogeno

In tal caso $V(r) = -e^2/r$, dove e è la carica dell'elettrone. Ponendo $\lambda = -\kappa^2$ per $\kappa > 0$ (cioè, richiedendo che l'energia sia negativa), l'equazione di Schrödinger (VI.10) ha la seguente forma:

$$S''(r) + \left(-\kappa^2 + \frac{e^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) S(r) = 0, \quad (\text{VI.30})$$

dove $l = 0, 1, 2, \dots$. Sostituendo $S(r) = e^{-\kappa r} w(r)$ otteniamo

$$w''(r) - 2\kappa w'(r) + \left(\frac{e^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) w(r) = 0. \quad (\text{VI.31})$$

Sostituendo ora $w(r) = r^\alpha \sum_{s=0}^{\infty} c_s r^s$ si ottiene

$$\sum_{s=0}^{\infty} [\{(\alpha+s)(\alpha+s-1) - l(l+1)\}c_s + \{e^2 - 2\kappa(\alpha+s-1)\}c_{s-1}] r^{\alpha+s-2} = 0. \quad (\text{VI.32})$$

Osserviamo che il termine costante nella (VI.32) coincide con $(\alpha-l-1)(\alpha+l)c_0$. Scegliendo $\alpha = l + 1$ (escludendo $\alpha = -l$) otteniamo

$$\frac{c_s}{c_{s-1}} = \frac{2\kappa(s+l) - e^2}{s(s+2l+1)}, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{VI.33})$$

Per produrre soluzioni polinomiali richiediamo che $\kappa = (e^2/2n)$ per $n = l + 1, l + 2, \dots$.³ In tal caso risulta $c_{n-l} = c_{n+1-l} = \dots = 0$; dunque $w(r) = r^{l+1}v(r)$, dove $v(r)$ è un polinomio in r di grado $n - l - 1$. In altre parole,

$$\begin{cases} \kappa_n^2 = -\frac{e^4}{4n^2}, & n = l + 1, l + 2, \dots, \\ \psi(r, \theta, \varphi) = r^{l+1} e^{-e^2 r/2n} v_{l, n-l-1}(r) Y_l^m(\theta, \varphi), & m = -l, -l + 1, \dots, l. \end{cases} \quad (\text{VI.34})$$

³Si pone $n = s + l$, dove $s = 1, 2, \dots$ e $l = 0, 1, 2, \dots$. Quindi $n = 1, 2, 3, \dots$ e $l = 0, 1, \dots, n - 1$.

Ponendo $w(r) = r^{l+1}v(r)$, $t = 2\kappa r$, $e^2 = 2\kappa n$ e $\tilde{v}(t) = v(r)$, otteniamo

$$t\tilde{v}''(t) + (2l + 2 - t)\tilde{v}'(t) + (n - l - 1)\tilde{v}(t) = 0. \quad (\text{VI.35})$$

Sostituendo $x \mapsto t$, $\alpha \mapsto 2l + 1$ e $n \mapsto n - l - 1$ nell'equazione differenziale di Laguerre si arriva alla (VI.35). Dunque $\tilde{v}(t)$ è proporzionale a $L_{n-l-1}^{(2l+1)}(t)$. In altre parole,

$$\begin{cases} E_n = -\kappa_n^2 = -\frac{e^4}{4n^2}, & n = l + 1, l + 2, \dots, \\ \psi(r, \theta, \varphi) = \text{cost.} r^{l+1} e^{-e^2 r/2n} L_{n-l-1}^{(2l+1)}\left(\frac{e^2 r}{n}\right) Y_l^m(\theta, \varphi), & m = -l, -l + 1, \dots, l, \end{cases} \quad (\text{VI.36})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$, $l = 0, 1, \dots, n - 1$ e $m = -l, -l + 1, \dots, l$.

Osserviamo ora che le energie $E_n = -(e^4/4n^2)$ degli stati limite dell'idrogeno vengono determinate dall'intero $n \in \mathbb{N}$. Ad ogni $n \in \mathbb{N}$ corrispondono $n - 1$ valori di l ($l = 0, 1, \dots, n - 1$) e ad ogni tale l $2l + 1$ valori di m ($m = -l, \dots, l$). Quindi ad ogni $n \in \mathbb{N}$ corrispondono

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

valori di (l, m) ($l, m \in \mathbb{Z}$, $|m| \leq l < n$). In altre parole, per $E = -e^4/4n^2$ l'equazione di Schrödinger con potenziale $V(r) = -(e^2/r)$ ha n^2 soluzioni linearmente indipendenti in $L^2(\mathbb{R}^3)$.

3 Equazione di Schrödinger Periodica

a. Problemi al contorno con periodicità. Consideriamo ora l'equazione di Schrödinger con potenziale periodico

$$V(x) = V(x + a_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad (\text{VI.37})$$

dove $\{a_1, a_2, a_3\}$ è un sistema di tre vettori linearmente indipendenti in \mathbb{R}^3 e il potenziale $V(x)$ è continuo. Allora, dato $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$ si può studiare l'equazione di Schrödinger sotto le *condizioni k-periodiche*

$$\psi(x + k_j a_j) = \psi(x), \quad j = 1, 2, 3, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (\text{VI.38})$$

Ciò include le *condizioni periodiche*

$$\psi(x + a_j) = \psi(x), \quad j = 1, 2, 3, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (\text{VI.39})$$

oppure le *condizioni 1-periodiche*, dove $\mathbf{1} = (1, 1, 1)$. Una terza classe di condizioni al contorno consiste nelle *condizioni t-periodiche*

$$\psi(x + a_j) = e^{i\pi t_j} \psi(x), \quad j = 1, 2, 3, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (\text{VI.40})$$

dove $\exp(i\pi t_j)$ è una radice dell'unità di ordine k_j ($j = 1, 2, 3$) e $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$.

Sia

$$A = \{x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 : x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]\} \quad (\text{VI.41})$$

il cosiddetto *parallelogramma periodo* e sia

$$A(k) = \{x_1 k_1 a_1 + x_2 k_2 a_2 + x_3 k_3 a_3 : x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]\}, \quad (\text{VI.42})$$

dove $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$. L'equazione di Schrödinger con le condizioni k -periodiche si può considerare come un problema al contorno sul dominio limitato $A(k)$, mentre l'equazione di Schrödinger con condizioni periodiche o \mathbf{t} -periodiche si può considerare come un problema al contorno sul dominio limitato A . Se il potenziale $V(x)$ è reale, continua e periodica (seconda la (VI.37)), allora tutti e tre problemi al contorno hanno uno spettro di autovalori reali che si accumulano a $+\infty$. In tutte e tre casi esiste una base ortonormale (in $L^2(A(k))$ oppure in $L^2(A)$) di autofunzioni del problema al contorno.

Per $k = (k_1, k_2, k_3)$ siano

$$\Lambda_0(k) \leq \Lambda_1(k) \leq \Lambda_2(k) \leq \dots \quad (\text{VI.43})$$

gli autovalori del problema k -periodico e per $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ un vettore di radici dell'unità

$$\lambda_0(\mathbf{t}) \leq \lambda_1(\mathbf{t}) \leq \lambda_2(\mathbf{t}) \leq \dots \quad (\text{VI.44})$$

gli autovalori del problema \mathbf{t} -periodico.

Si vede facilmente che una soluzione dell'equazione di Schrödinger con condizione al contorno

$$\psi(x + a_j) = \exp(2\pi i r_j / k_j) \psi(x)$$

per opportuni interi $r_j \in \{0, 1, \dots, k_j - 1\}$ ($j = 1, 2, 3$) soddisfa anche alle condizioni (VI.38).

Teorema VI.1 *Per $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$ siano $\exp(i\pi t_{r_j}) = \exp(2\pi i r_j / k_j)$ ($r_j = 0, 1, \dots, k_j - 1$) le radici dell'unità di ordine k_j ($j = 1, 2, 3$). Allora le basi ortonormali dei $k_1 k_2 k_3$ problemi al contorno con condizioni $(t_{r_1}, t_{r_2}, t_{r_3})$ -periodiche in $L^2(A)$ possono essere messe insieme per formare una base ortonormale del problema con condizioni k -periodiche in $L^2(A(k))$.*

Per esempio, sia $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ e $k_3 = 4$. Allora i vettori \mathbf{t} appartengono all'insieme di 24 elementi tali che il vettore $(\exp(it_{r_1}), \exp(it_{r_2}), \exp(it_{r_3}))$ vale

uno di

$$\begin{cases} (1, 1, 1), (1, 1, i), (1, 1, -1), (1, 1, -i), \\ (1, \varepsilon, 1), (1, \varepsilon, i), (1, \varepsilon, -1), (1, \varepsilon, -i), \\ (1, \varepsilon^2, 1), (1, \varepsilon^2, i), (1, \varepsilon^2, -1), (1, \varepsilon^2, -i), \\ (-1, 1, 1), (-1, 1, i), (-1, 1, -1), (-1, 1, -i), \\ (-1, \varepsilon, 1), (-1, \varepsilon, i), (-1, \varepsilon, -1), (-1, \varepsilon, -i), \\ (-1, \varepsilon^2, 1), (-1, \varepsilon^2, i), (-1, \varepsilon^2, -1), (-1, \varepsilon^2, -i), \end{cases}$$

dove $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ e $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

b. Principio variazionale. Sia \mathcal{F} l'insieme di tutte le funzioni in A continue e di classe C^1 a tratti. Per $f, g \in \mathcal{F}$ si ha secondo l'identità di Green

$$\begin{aligned} J(f, g) &= \int_A \left[\nabla f(x) \cdot \nabla \overline{g(x)} + V(x) f(x) \overline{g(x)} \right] dx \\ &= - \int_A f(x) \left[\Delta \overline{g(x)} - V(x) \overline{g(x)} \right] + \int_{\partial A} f \frac{\partial \overline{g}}{\partial n} d\sigma, \end{aligned} \quad (\text{VI.45})$$

dove ∂A è la frontiera del parallelogramma periodo e $\partial/\partial n$ la derivata normale esterna. Per $f \in \mathcal{F}$ e $g = \psi_n(\cdot; \mathbf{t}) \in \mathcal{F}$ che soddisfa all'equazione di Schrödinger con condizioni \mathbf{t} -periodiche, si ha

$$J(f, g) = \lambda_n(\mathbf{t}) f_n(\mathbf{t}), \quad f_n(\mathbf{t}) = \int_A f(x) \overline{\psi_n(x; \mathbf{t})} dx. \quad (\text{VI.46})$$

Per $f = \psi_m(\cdot; \mathbf{t})$ si ha, grazie all'ortonormalità delle autofunzioni,

$$J(\psi_m(\cdot; \mathbf{t}), \psi_n(\cdot; \mathbf{t})) = \begin{cases} \lambda_n(\mathbf{t}), & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Riordinando gli autovalori in ordine crescente si trova il *principio di Rayleigh-Ritz*⁴

$$\lambda_n(\mathbf{t}) = \min_{\substack{f \perp \psi_m(\cdot; \mathbf{t}), m < n \\ f \in \mathcal{F}, f \text{ soddisfa alla (VI.40)}}} \frac{J(f, f)}{\int_A |f(x)|^2 dx}. \quad (\text{VI.47})$$

Introduciamo ora due problemi ausiliari:

- a. l'equazione di Schrödinger in A con condizioni di Dirichlet $\psi(x) = 0$ per $x \in \partial A$: autovalori $\Lambda_0 \leq \Lambda_1 \leq \dots$, base ortonormale di autofunzioni $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$.

⁴Per una matrice $n \times n$ A arbitraria si trovano così i numeri singolari $s_1(A) \geq \dots \geq s_n(A)$.

b. l'equazione di Schrödinger in A con condizioni di Neumann $\frac{\partial \psi}{\partial n}(x) = 0$ per $x \in \partial A$: autovalori $\nu_0 \leq \nu_1 \leq \dots$, base ortonormale $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Anche per questi due problemi al contorno esiste il principio di Rayleigh-Ritz. Utilizzando l'identità di Green (VI.45) si può dimostrare che

$$\nu_n \leq \lambda_n(\mathbf{t}) \leq \Lambda_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{VI.48})$$

c. Bandi e funzioni di Bloch. Sia \mathcal{L}_n l'insieme di tutti gli autovalori $\lambda_n(\mathbf{t})$, dove $\exp(i\pi t_j)$ sono opportune radici dell'unità, e sia $\mathcal{L} = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$. Allora \mathcal{L}_n è un intervallo chiuso e \mathcal{L} è un insieme chiuso. Si può dimostrare che \mathcal{L} coincide con l'insieme di tutte le λ per cui l'equazione di Schrödinger $\Delta \psi = \lambda \psi$ ha una soluzione limitata non banale. Si può anche mostrare che \mathcal{L} è la chiusura dell'insieme di tutti gli autovalori $\Lambda_n(k)$ dei problemi al contorno per l'equazione di Schrödinger con condizioni k -periodiche. L'insieme \mathcal{L} si chiama *l'insieme di stabilità condizionale*. I sottoinsiemi \mathcal{L}_n sono i cosiddetti *bandi*. I bandi \mathcal{L}_n sono tutti intervalli chiusi, dove i punti interni sono autovalori ma gli estremi dell'intervallo spesso non lo sono.

Se $\lambda \in \mathcal{L}$, esistono soluzioni limitate non banali dell'equazione di Schrödinger del tipo

$$\psi(x) = p(x)e^{ic \cdot x}, \quad (\text{VI.49})$$

dove $p(x) \not\equiv 0$ soddisfa alle condizioni periodiche (VI.39) e c è un vettore reale costante. Soluzioni del tipo (VI.49) si chiamano *onde di Bloch* oppure *funzioni di Bloch*. Tranne per un fattore costante, le onde di Bloch sono le autofunzioni $\psi(x; \mathbf{t})$ dell'equazione di Schrödinger con condizioni \mathbf{t} -periodiche.

Per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vale la cosiddetta *formula di Gelfand*:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} \int |\alpha_n(\mathbf{t})|^2 dt,$$

dove

$$\alpha_j(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\psi_j(x; \mathbf{t})} dx.$$

Utilizzando la formula di Gelfand si può dimostrare che le autofunzioni $\psi_n(x; \mathbf{t})$ (per $n = 0, 1, 2, \dots$ e tutti i $\alpha_j(\mathbf{t})$) costituiscono una base dello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Se il potenziale $V(x)$ è reale, continuo e periodico, allora il corrispondente operatore di Schrödinger $L = -\frac{d^2}{dx^2} + V$ (definito su un opportuno dominio denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$) è autoaggiunto e quindi il suo spettro è reale. Lo spettro consiste in autovalori e spettro continuo. Purtroppo, gli autovalori possono,

magari, avere una molteplicità infinita, un fenomeno che non si vede nei problemi unidimensionali. Si può infatti dimostrare la non esistenza di autovalori di molteplicità finita. Lo spettro è composto di bande. La distanza tra due bande consecutivi tende a zero se $n \rightarrow \infty$.

Abbiamo ora discusso lo spettro dell'operatore differenziale di Schrödinger in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Lo spettro dello stesso operatore in $L^2(A)$ (sotto condizioni t -periodiche) oppure in $L^2(A(k))$ (sotto condizioni k -periodiche) è molto diverso e consiste esclusivamente in autovalori di molteplicità finita.

d. Reticolato reciproco e zona di Brillouin. Siano a_j ($j = 1, 2, 3$) i tre vettori che generano il parallelogramma periodo A . Sia

$$\mathbf{A} = \text{col}(a_1, a_2, a_3)$$

la matrice non singolare con colonne a_1, a_2, a_3 . Per $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$ e $e_3 = (0, 0, 1)^T$ si ha $a_1 = \mathbf{A}e_1$, $a_2 = \mathbf{A}e_2$ e $a_3 = \mathbf{A}e_3$. Ora definiamo $b_j = (\mathbf{A}^T)^{-1}e_j$ ($j = 1, 2, 3$). Allora

$$(b_k, a_j) = ((\mathbf{A}^T)^{-1}e_k, \mathbf{A}e_j) = (e_k, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}e_j) = (e_k, e_j) = \delta_{k,j}, \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (\text{VI.50})$$

Il reticolato $\{m_1b_1 + m_2b_2 + m_3b_3 : m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}\}$ si chiama il *reticolato reciproco* \mathcal{R} . Per un punto $b \in \mathcal{R}$ qualsiasi abbiamo

$$\exp(2\pi i b \cdot a_j) = 1, \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{VI.51})$$

Allora la *zona di Brillouin* (vedi [2]) associata ai vettori a_1, a_2, a_3 è l'insieme

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \leq \|x - 2\pi b\|_2 \text{ per ogni } 0 \neq b \in \mathcal{R}\}, \quad (\text{VI.52})$$

cioè i punti $x \in \mathbb{R}^3$ più vicino all'origine che a tutti i punti di $2\pi\mathcal{R}$ diversi dall'origine. Per trovare Z si costruiscono i non più di 18 piani $\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = \|x - 2\pi b\|_2\}$, dove b è uno dei punti $m_1b_1 + m_2b_2 + m_3b_3$ con $m_1, m_2, m_3 \in \{-1, 0, 1\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Questi piani dividono \mathbb{R}^3 in domini poliedrali. La zona di Brillouin Z è il poliedro chiuso che contiene l'origine.

Per $c \in \mathbb{R}^3$ equidistante da due punti di $2\pi\mathcal{R}$, sia $2\pi b_0$ uno dei punti di $2\pi\mathcal{R}$ più vicino a c . In tal caso $c_0 = c - 2\pi b_0 \in Z$ e $\|c_0\|_2 \leq \|c - 2\pi b\|_2$ per ogni $b \in \mathcal{R}$. D'altra parte, se c non è equidistante da due punti di $2\pi\mathcal{R}$, sia $2\pi b_0$ il punto di $2\pi\mathcal{R}$ più vicino a c ; allora $c_0 \stackrel{\text{def}}{=} c - 2\pi b_0 \notin \partial Z$ e $\|c_0\|_2 < \|c - 2\pi b\|_2$ per ogni $b \in \mathcal{R} \setminus \{b_0\}$. Grazie alla (VI.51), si ha

$$\exp(ic \cdot a_j) = \exp(ic_0 \cdot a_j), \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{VI.53})$$

Si vede facilmente che Z consiste nei punti c_0 di norma euclidea minima per cui vale la (VI.53) per qualunque $c \in \mathbb{R}^3$ collegato a c_0 tramite $c_0 = c - 2\pi b$ con $b \in \mathcal{R}$.

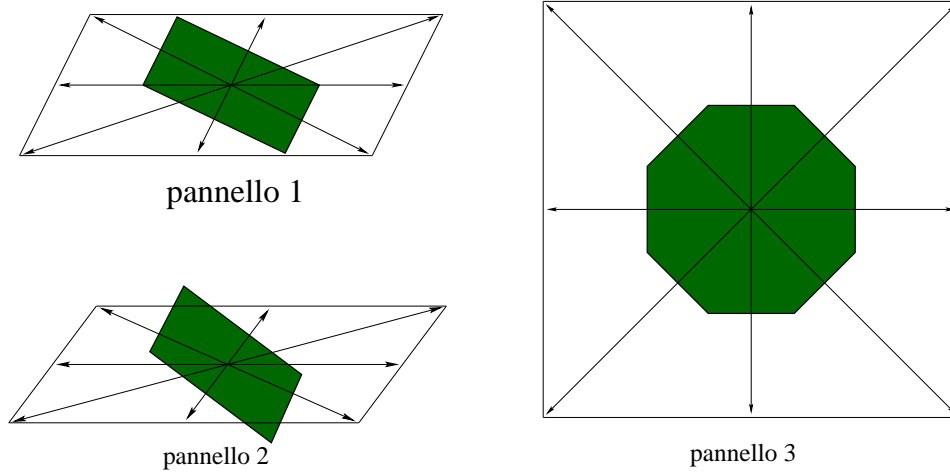


Figura VI.2: La zona di Brillouin in due dimensioni. Le frecce corrispondono ai punti $\pm 2\pi b_1$, $\pm 2\pi b_2$, $\pm 2\pi(b_1 + b_2)$ e $\pm 2\pi(b_1 - b_2)$, dove b_1 e b_2 sono proporzionali a $(5, 0)$ e $(1, 2)$ nel pannello 1, a $(12, 0)$ e $(3, 4)$ nel pannello 2, e a $(1, 0)$ e $(0, 1)$ nel pannello 3.

e. Il problema al contorno t -periodico per $V \equiv 0$. Sia $c \in \mathbb{R}^3$ il vettore unico che soddisfa alle equazioni

$$c \cdot a_j = \pi t_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (\text{VI.54})$$

Allora $c = \pi(t_1 b_1 + t_2 b_2 + t_3 b_3)$. Se c è equidistante tra due punti di $2\pi\mathcal{R}$, sia $2\pi b_0$ uno di quelli e poniamo $c_0 = c - 2\pi b_0 \in Z$. Se c non è equidistante da due punti di $2\pi\mathcal{R}$, sia $2\pi b_0$ il punto di $2\pi\mathcal{R}$ più vicino a c e poniamo $c_0 = c - 2\pi b_0$. In tal caso

$$\psi(x) = \exp(i(c_0 + 2\pi b) \cdot x) \quad (\text{VI.55})$$

per qualsiasi $b \in \mathcal{R}$ è una soluzione limitata non banale dell'equazione di Schrödinger $\Delta\psi + \lambda\psi = 0$ per $\lambda = \|c_0 + 2\pi b\|_2^2$. Quindi se $b \in \mathcal{R}$, questi valori di λ costituiscono gli autovalori del problema al contorno t -periodico. Non ci sono altri autovalori del problema al contorno con condizioni t -periodiche e le corrispondenti autofunzioni (VI.54) costituiscono una base ortogonale di $L^2(A)$.

Appendice A

La Funzione Gamma

La funzione Gamma è definita dall'integrale generalizzato assolutamente convergente

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (\text{A.1})$$

dove la convergenza assoluta segue spezzando l'intervallo di integrazione in due, in $(0, 1)$ ed in $(1, +\infty)$. Infatti $|e^{-t} t^{z-1}| \leq t^{\operatorname{Re} z - 1}$ per $t \in (0, 1)$ e $t^\alpha |e^{-t} t^{z-1}| \rightarrow 0$ se $t \rightarrow +\infty$ per ogni $\alpha > 1$. La funzione Γ è analitica nel semipiano destro $\operatorname{Re} z > 0$.

Dopo un'integrazione per parti si ottiene facilmente

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (\text{A.2})$$

Quest'identità può essere utilizzata per definire la funzione Gamma altrove. Prima si definisca la funzione Gamma nella striscia $-1 < \operatorname{Re} z \leq 0$ da $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$, poi nella striscia $-2 < \operatorname{Re} z \leq -1$, ecc. Siccome il denominatore nell'uguaglianza $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ si annulla per $z = 0$, risulta una funzione analitica nell'aperto $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. Negli punti $z = 0, -1, -2, \dots$ la funzione Gamma ha dei poli semplici.

Si ha $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$. Utilizzando la (A.2) risulta

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.3})$$

Un altro valore particolare della funzione Gamma è quello per $z = 1/2$. Si ha

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Utilizzando la (A.2) si ottiene

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.4})$$

Sia ora

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta, \quad (\text{A.5})$$

dove $\min(\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q) > 0$ e la trasformazione $t = \cos^2 \theta$ serve per cambiare la prima espressione per $B(p, q)$ nella seconda. La funzione $B(p, q)$ si chiama *funzione beta di Eulero*. Si vede facilmente che per $\min(\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q) > 0$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{p-1} s^{q-1} e^{-(t^2+s^2)} dt ds$$

(sostituendo $t = \rho \cos \theta$ e $s = \rho \sin \theta$)

$$\begin{aligned} &= \left(2 \int_0^\infty \rho^{2(p+q)-1} e^{-\rho^2} d\rho \right) \left(2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta \right) \\ &= \left(\int_0^\infty t^{p+q-1} e^{-t} dt \right) \left(2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta \right) \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q). \end{aligned}$$

Quindi

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \min(\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q) > 0. \quad (\text{A.6})$$

Per $0 < \operatorname{Re} z < 1$ si ha

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= B(z, 1-z) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{-z} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2z-1} (\cos \theta)^{1-2z} d\theta = \int_0^\infty \frac{v^{z-1}}{1+v} dv, \end{aligned}$$

dove abbiamo sostituito prima $t = \sin^2 \theta$ e poi $v = \tan^2 \theta$. L'ultimo integrale si può scrivere in un'altra forma [vedi E.C. Titchmarsh, *Theory of Functions*, Oxford Univ. Press, London, 1939; p. 105], cioè

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (\text{A.7})$$

valida per $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ per l'unicità delle estensioni analitiche.

Appendice B

Integrazione secondo Lebesgue

L'integrale di Riemann non basta per studiare la fisica matematica, grazie alle sue pessime proprietà di convergenza. D'altra parte, l'integrale di Lebesgue copre tutte le applicazioni di fisica matematica ma non è facile da introdurre in poco tempo. Fortunatamente lo studio degli insiemi di Borel e delle funzioni misurabili secondo Borel ci permette a generalizzare il concetto di integrale abbastanza ma a farlo in tempi ragionevoli.

1 Insiemi di Borel

Un sottoinsieme di \mathbb{R}^n è detto *insieme di Borel* se appartiene alla famiglia di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n più piccola ottenuta dagli insiemi aperti applicando le seguenti operazioni: 1) unione finita o numerabile, 2) intersezione finita o numerabile, e 3) complementazione [cioè l'operazione $B \mapsto \mathbb{R}^n \setminus B$]. È chiaro che tutti i sottoinsiemi aperti e chiusi di \mathbb{R}^n sono di Borel. Per $n = 1$ gli intervalli $[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$ e $(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n})$ sono di Borel.

Siano $a, b \in \mathbb{R}^n$, dove $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$. Allora

$$m([a, b)) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$$

è la *misura* del pluriintervallo $[a, b)$. Per un'unione finita o numerabile E di pluriintervalli due a due disgiunti si definisce la sua misura $m(E)$ come la somma delle misure dei pluriintervalli, possibilmente con $m(E) = +\infty$. Allora $m([a, \infty)) = +\infty$, dove $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > a_1, \dots, x_n > a_n\}$. Siccome tutte le palle $B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 < \varepsilon\}$ sono unioni numerabili due a due disgiunti di pluriintervalli, anche la misura di $B_\varepsilon(a)$ si può calcolare. Osservando ora che tutti gli aperti sono unioni finite o numerabili di palle, si può estendere la misura a qualsiasi sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n .

Sia Σ la cosiddetta σ -algebra degli insiemi di Borel in \mathbb{R}^n , dove σ -algebra

vuol dire una famiglia di sottoinsiemi chiusa rispetta all'unione finita e numerabile, all'intersezione finita e numerabile e alla complementazione che contiene l'insieme vuoto e \mathbb{R}^n stesso, insieme con la misura di Borel. Questa misura ha le seguenti proprietà:

1. $m(\emptyset) = 0$ e $m(\mathbb{R}^n) = +\infty$,
2. Se $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ è una famiglia numerabile di insiemi di Borel due a due disgiunti, allora $\cup_{n=1}^\infty B_n$ è un insieme di Borel e

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n).$$

Di conseguenza, se $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ è una successione crescente di insiemi di Borel, allora

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(C_n).$$

Purtroppo la σ -algebra degli insiemi di Borel ha la proprietà che non tutti i sottoinsiemi degli insiemi di Borel di misura zero sono di Borel. Per questo motivo la σ -algebra di Borel viene estesa a quella di Lebesgue: Un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n si dice *misurabile (secondo Lebesgue)* se esiste un insieme di Borel B tale che la cosiddetta differenza simmetrica $A \Delta B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ è un sottoinsieme di un insieme di Borel di misura zero. In tal caso si definisce come la misura $m(A)$ quella dell'insieme di Borel B . Si può dimostrare che gli insiemi misurabili secondo Lebesgue costituiscono una σ -algebra con le seguenti proprietà:

1. $m(\emptyset) = 0$ e $m(\mathbb{R}^n) = +\infty$,
2. Se $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili due a due disgiunti, allora $\cup_{n=1}^\infty B_n$ è un insieme misurabile e

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n).$$

Di conseguenza, se $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ è una successione crescente di insiemi misurabili, allora

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(C_n).$$

È molto difficile individuare un sottoinsieme di \mathbb{R}^n che non è misurabile. Dall'assioma di scelta segue la sua esistenza.¹ Purtroppo esistono altri assiomi della teoria degli insiemi che conducono ad una situazione in cui ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^n è misurabile.

2 Integrale di Lebesgue

Si dice *funzione semplice* una funzione complessa φ definita in \mathbb{R}^n che ha soltanto un numero finito di valori e dove tutti gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = c\}$ sono misurabili di misura finita. Essendo $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ i valori diversi della funzione semplici φ , si ha

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \chi_{E_j} = \begin{cases} \lambda_j, & x \in E_j, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_{j=1}^m E_j, \end{cases}$$

dove E_1, \dots, E_m sono insiemi misurabili di misura finita disgiunti due a due e χ_E è la funzione caratteristica di E (cioè, $\chi_E(x) = 1$ se $x \in E$, e $\chi_E(x) = 0$ se $x \notin E$). Come *integrale di Lebesgue* si definisce

$$\int \varphi(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^m \lambda_j m(E_j).$$

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ si dice misurabile se per ogni insieme di Borel E in \mathbb{C} l'immagine inversa

$$f^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in E\}$$

è misurabile. In particolare, le funzioni continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sono misurabili.

Le funzioni misurabili hanno le seguenti proprietà:

1. Se $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sono misurabili, allora $f + g$ e $f - g$ sono misurabili.
2. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ è misurabile e $\lambda \in \mathbb{C}$, allora λf è misurabile.

¹Dim: La relazione $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ è una relazione di equivalenza in $[0, 1)$ che suddivide $[0, 1)$ in classi di equivalenza. Applicando l'Assioma di Scelta, sia E un sottoinsieme di $[0, 1)$ che contiene esattamente un elemento di ogni classe di equivalenza. Allora, per ogni $q \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$, $E_q \stackrel{\text{def}}{=} [(q + E) \cap [0, 1)] \cup [(q - 1 + E) \cap [0, 1)]$ è un sottoinsieme di $[0, 1)$ che contiene esattamente un elemento di ogni classe di equivalenza. Se E fosse misurabile, lo sarebbe anche E_q per ogni $q \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$. In tal caso la misura di E_q non dipenderebbe da q , mentre $\cup_{q \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}} E_q = [0, 1)$. Quindi sia l'ipotesi $m(E) = 0$ che quella $m(E) > 0$ condurrebbe alla contraddizione che $m([0, 1)) \in \{0, +\infty\}$. Di conseguenza, E non può essere misurabile.

3. Se $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ è misurabile, allora fg è misurabile.
4. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sono misurabili, allora $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ è misurabile.
5. Se $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono misurabili, allora $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $|f| = \max(f, -f)$, $f_+ = \max(f, 0)$ e $f_- = \max(-f, 0)$ sono misurabili.
6. Se f_1, f_2, \dots sono misurabili e $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, allora f è misurabile.

Definiamo ora l'integrale di Lebesgue per le funzioni misurabili non negative. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ misurabile e non negativa. Allora esiste una successione crescente di funzioni semplici non negative $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ tali che $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ (tranne in un sottoinsieme di misura zero). In tal caso la successione degli integrali di Lebesgue $\int f_n(x) dx$ è crescente e il suo limite (che potrebbe essere uguale a $+\infty$) si definisce come l'integrale di Lebesgue della f :

$$\int f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx.$$

Nel seguente teorema i valori degli integrali possono essere uguali a $+\infty$.

Teorema B.1 (di Beppo-Levi) *Sia $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una successione crescente di funzioni misurabili non negative. Sia $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ per $x \in \mathbb{R}^n$. Allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx.$$

Passiamo ora all'integrazione delle funzioni a valori reali. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile. Poniamo $f_\pm = \max(\pm f, 0)$. Allora $f_\pm : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ sono misurabili e non negative e $f_+ - f_- = f$. Poniamo ora

$$\int f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int f_+(x) dx - \int f_-(x) dx & \text{se ambedue integrali sono finiti,} \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x) dx = +\infty \text{ e } \int f_-(x) dx < +\infty, \\ -\infty & \text{se } \int f_+(x) dx < +\infty \text{ e } \int f_-(x) dx = +\infty, \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x) dx = \int f_-(x) dx = +\infty. \end{cases}$$

Inoltre,

$$\int |f(x)| dx$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int f_+(x) dx + \int f_-(x) dx & \text{se ambedue integrali sono finiti,} \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x) dx = +\infty \text{ e } \int f_-(x) dx < +\infty, \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x) dx < +\infty \text{ e } \int f_-(x) dx = +\infty, \\ \text{non definito} & \text{se } \int f_+(x) dx = \int f_-(x) dx = +\infty. \end{cases}$$

Una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *sommabile* se ambedue gli integrali $\int f_{\pm}(x) dx$ sono finiti.

Per definire gli integrali delle funzioni misurabili $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, si osservi prima che $\text{Re } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\text{Im } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono misurabili. In tal caso, se sono definiti ambedue gli integrali $\int \text{Re } f(x) dx$ e $\int \text{Im } f(x) dx$, allora

$$\int f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int \text{Re } f(x) dx + i \int \text{Im } f(x) dx.$$

Una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *sommabile* se è finito l'integrale della funzione $|f| = \sqrt{(\text{Re } f)^2 + (\text{Im } f)^2}$.

L'integrale di Lebesgue ha la seguenti proprietà:

1. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$
2. $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx,$
3. $|\int f(x) dx| \leq \int |f(x)| dx.$
4. Se $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$ ha misura zero, allora $\int f(x) dx = \int g(x) dx.$

L'ultima proprietà è di estrema importanza per capire l'integrale di Lebesgue: Il suo valore non si cambia se la funzione viene modificata su un insieme di misura zero. Due funzione f, g come nella proprietà 4 si dicono *quasi uguali*. Oppure: Si dice che $f(x) = g(x)$ *quasi ovunque*.

Infine, se E è un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^n , una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ si dice misurabile se la sua estensione $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus E, \end{cases}$$

è misurabile. In tal caso

$$\int_E f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int \tilde{f}(x) \chi_E(x) dx,$$

dove $\chi_E(x) = 1$ per $x \in E$ e $\chi_E(x) = 0$ per $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Discutiamo ora il seguente esempio illustrativo.

Esempio B.2 Sia $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Allora la f è continua per $x \geq 0$ e quindi misurabile. Vale l'integrale di Riemann generalizzata

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Purtroppo questo integrale non è un integrale di Lebesgue. Infatti,

$$f_+(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & 2(n-1)\pi \leq x \leq (2n-1)\pi, \\ 0, & \text{altrove;} \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} -\frac{\sin(x)}{x}, & (2n-1)\pi \leq x \leq 2n\pi, \\ 0, & \text{altrove,} \end{cases}$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Osservando che

$$\int_{2(n-1)\pi}^{(2n-1)\pi} \sin(x) dx = - \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \sin(x) dx = 1,$$

si vede facilmente che

$$\int f_+(x) dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\pi} = +\infty,$$

$$\int f_-(x) dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} = +\infty.$$

Quindi $\int f(x) dx$ non esiste nel senso di Lebesgue.

3 Alcuni Teoremi

Il seguente risultato riguarda lo scambio tra limite e integrazione.

Teorema B.3 (della convergenza dominata, di Lebesgue) Sia $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una successione di funzioni misurabili tali che

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ per quasi ogni x ,

b. per $n = 1, 2, 3, \dots$ si ha $|f_n(x)| \leq g(x)$ per quasi ogni x , dove g è sommabile.

Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx.$$

La seconda condizione è assolutamente necessaria.

Esempio B.4 Sia $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa tale che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1.$$

Ponendo $f_n(x) = \phi(x - n)$, si vede facilmente che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = 1, \quad \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0.$$

Dunque non è consentita l'applicazione del Teorema della Convergenza Dominata.

Esempio B.5 Sia $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione continua e non negativa tale che

$$\phi(0) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1.$$

Ponendo $f_n(x) = n\phi(nx)$, si vede subito che $f_n(x) \rightarrow 0$ per $x \neq 0$ e $f_n(0) \rightarrow +\infty$. Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = 1, \quad \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0.$$

Dunque non è consentita l'applicazione del Teorema della Convergenza Dominata.

Il Teorema della Convergenza Dominata è fondamentale e ha molti corollari di importanza. Per esempio, sia $f(\cdot, \xi) : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione sommabile che dipende in modo continuo dal parametro $\xi \in \Omega$. Allora $\int f(x, \xi) dx$ dipende in modo continuo da $\xi \in \Omega$ **se esiste una funzione sommabile** $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ **tale che** $|f(x, \xi)| \leq g(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\xi \in \Omega$. Infatti, scegliendo $\eta \in \Omega$, basterebbe considerare una successione in $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ in Ω convergente ad η e la successione di funzioni $f_n(x) = f(x, \eta_n)$ per $n = 1, 2, 3, \dots$ per dimostrare il corollario.

L'ultimo risultato riguarda il cambio dell'ordine di integrazione.

Teorema B.6 (di Fubini) Sia $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}$, scritta come funzione di $z = (x, y)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e $z \in \mathbb{R}^{n+m}$, misurabile e non negativa, oppure sommabile. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx \right) dy. \quad (\text{B.1})$$

In particolare, la (B.1) vale se almeno uno degli integrali $\int \int |f(x, y)| dy dx$ e $\int \int |f(x, y)| dx dy$ è finito.

Appendice C

Funzioni Test, Distribuzioni e Applicazioni

In questo capitolo discuteremo le distribuzioni, le funzioni test e loro applicazioni principali. Il motivo principale per introdurre le distribuzioni nella seconda metà degli anni 40 è stato la giustificazione rigorosamente matematica della funzione delta di Dirac utilizzata in fisica teorica. Secondo i libri di testo in fisica la funzione $\delta(x - x_0)$ è una funzione con valori uguali a zero per $x \neq x_0$, con il valore $+\infty$ per $x = x_0$ e tale che l'integrale $\int \delta(x - x_0) dx = 1$. Una tale funzione non si può inquadrare nell'ambito delle funzioni misurabili, poichè essa si annulla quasi ovunque ma il suo integrale è uguale a 1. D'altra parte, se $f(x)$ è una funzione, si ha

$$\int f(x)\delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

Quindi si potrebbe inquadrare la funzione delta di Dirac come l'applicazione lineare $f \mapsto f(x_0)$ applicata ad un'opportuna classe di funzioni test f . Siccome deve avere senso il valore della f nel punto x_0 , la f deve essere almeno continua.

Una possibile descrizione della funzione delta è la sua rappresentazione come caso limite di una successione $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ di funzioni δ_n abbastanza regolari tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x)\delta_n(x - x_0) dx = f(x_0)$$

per un'opportuna classe di funzioni test f . Per esempio, se il dominio della funzione delta fosse la retta reale, ci sarebbero le seguenti possibilità:

a. $\delta_n(x) = n$ per $|x| < \frac{1}{2n}$ e $\delta_n(x) = 0$ per $|x| > \frac{1}{2n}$;

b. $\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + n^2x^2}$;

$$c. \delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2};$$

$$d. \delta_n(x) = -n \text{ per } |x| < \frac{1}{2n}, \delta_n(x) = 2n \text{ per } \frac{1}{2n} \leq |x| \leq \frac{1}{n} \text{ e } \delta_n(x) = 0 \text{ per } |x| > \frac{1}{n}.$$

Osserviamo che 1) $\delta_n(x - x_0)$ ha una peak per $x = x_0$, 2) tende all'infinito se $x = x_0$, 3) tende a zero se $x \neq x_0$, e 4) verifica $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1$.

1 Funzionali Lineari

Sia X uno spazio di Banach reale o complesso (cioè $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Un'applicazioni lineari $\Phi : X \rightarrow \mathbb{F}$ tale che

$$|\Phi\varphi| \leq \text{cost.} \|\varphi\|, \quad \varphi \in X,$$

si dice *funzionale lineare continuo* in X . Utilizzando

$$\|\Phi\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|\Phi\varphi\|$$

per normalizzare i funzionali lineari continui si ottiene uno spazio di Banach X^* , il cosiddetto *spazio duale*.

Se $X = \mathbb{F}^n$ ha dimensione finita n , esiste una corrispondenza biunivoca tra i funzionali lineari (continui) e i vettori $\psi \in \mathbb{F}^n$, dove

$$\Phi\varphi = (\varphi, \psi) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \varphi_k \psi_k, & \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \sum_{k=1}^n \varphi_k \bar{\psi}_k, & \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

per $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ e $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$. Inoltre, se la norma è quella euclidea, si ha $\|\Phi\| = \|\psi\|$. Di conseguenza, X^* ha la stessa struttura di X .

Se X è uno spazio di Hilbert, esiste un'analogia corrispondenza biunivoca tra i funzionali lineari continui Φ in X e i vettori di X . Secondo il Teorema di Rappresentazione di Riesz (Riesz' representation theorem), per ogni $\Phi \in X^*$ esiste $\psi \in X$ tale che

$$\Phi\varphi = (\varphi, \psi), \quad \varphi \in X.$$

Inoltre, $\|\Phi\| = \|\psi\|$.

Generalmente X^* non ha la stessa struttura di X se X è uno spazio di Banach separabile.

2 Funzioni Test

Sia $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^∞ che si annullano fuori di un insieme limitato. Allora gli elementi di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ si chiamano *funzioni test*. Per esempio,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - a^2}\right), & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases}$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si vede facilmente che

a. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale;

b. Se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

appartiene a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Si dice che una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ converge a φ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ se esiste un insieme limitato K tale che $\varphi_m(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ (qualunque sia m) e se $D^\alpha \varphi_m(x) \rightarrow D^\alpha \varphi(x)$ uniformemente in $x \in K$, qualunque sia il multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Spesso la terminologia funzione test viene utilizzata per gli elementi di uno spazio vettoriale $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ più esteso di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Poniamo

$$(1 + |x|)^\beta = (1 + |x_1|)^{\beta_1} \cdots (1 + |x_n|)^{\beta_n}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Allora una funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ appartiene ad $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se essa è di classe C^∞ e $(1 + |x|)^\beta (D^\alpha \varphi)(x)$ tende a zero se $|x| \rightarrow \infty$, qualunque siano i multiindici α, β . Si vede facilmente che

a. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale;

b. Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Si dice che una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ converge a φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se, per ogni insieme limitato K , $(1 + |x|)^\beta (D^\alpha \varphi_m)(x) \rightarrow (1 + |x|)^\beta (D^\alpha \varphi)(x)$ uniformemente in $x \in K$, qualunque siano i multiindici $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

È chiaro che

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n).$$

La vera sorpresa è che $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sia un sottospazio lineare denso in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

3 Distribuzioni

Una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *localmente sommabile* se converge finito l'integrale $\int_E |f(x)| dx$ per ogni insieme limitato E in \mathbb{R}^n . L'insieme di tutte le funzioni localmente sommabili è uno spazio vettoriale: $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Essenzialmente una distribuzione è un funzionale lineare: Per una distribuzione f e una funzione test φ si consideri il prodotto scalare (inglese: pairing)

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx.$$

Purtroppo, invece di considerare due funzioni $f, \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si prendano una distribuzione f in uno spazio vettoriale più esteso e una funzione test φ in uno spazio vettoriale più ristretto tali che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f, \varphi_m) = (f, \varphi)$$

per ogni successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ che converge a φ .

Più precisamente, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme di tutti i funzionali lineari f in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f, \varphi_m) = (f, \varphi)$$

per ogni successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ che converge a φ . Identificando $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ con il funzionale lineare

$$\varphi \mapsto (f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx = \int_K f(x)\varphi(x) dx,$$

dove K è una regione limitato K fuori della quale si annulla la φ , si vede facilmente che

$$L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Ovviamente $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale.

In modo analogo si definisce $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come l'insieme di tutti i funzionali f in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f, \varphi_m) = (f, \varphi)$$

per ogni successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ che converge a φ . Ovviamente $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale tale che

$$L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Purtroppo esistono funzioni localmente sommabili non contenute in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Per esempio, $e^{|x|}$ appartiene ad $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ma non appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Fortunatamente le distribuzioni che importano alle applicazioni principali, appartengono a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (e quindi a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$).

Una successione $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (risp., in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) converge a φ se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f_m, \varphi) = (f, \varphi)$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (risp., per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).

Discutiamo ora alcuni esempi.

a. Dato il punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il funzionale

$$\varphi \mapsto \varphi(x_0)$$

appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (e quindi a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$), poichè per una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ convergente a φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha $\varphi_m(x_0) \rightarrow \varphi(x_0)$. Questa distribuzione si chiama la distribuzione delta di Dirac:

$$(\delta_{x_0}, \varphi) = \varphi(x_0).$$

b. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, il funzionale

$$\varphi \mapsto \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) dx$$

appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (e quindi a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$), poichè per una successione qualsiasi $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ convergente a φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi_m(x) dx \rightarrow \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) dx.$$

Questa distribuzione si chiama la funzione di Heaviside:

$$(H_{x_0}, \varphi) = \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(x - x_0) \varphi(x) dx.$$

Si vede facilmente che $H(\cdot - x_0) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

c. Una funzione localmente sommabile tale che per un certo $m \geq 0$

$$\int |f(x)|(1 + |x|)^{-m} dx < +\infty,$$

appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Per due funzioni $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cioè per due funzioni $f, \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^∞ che si annullano rapidamente se $|x| \rightarrow \infty$, abbiamo

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi),$$

qualunque sia il multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e per $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Infatti, per dimostrarlo si facciamo α_1 integrazioni per parti rispetto alla variabile x_1 , α_2 integrazioni per parti rispetto alla variabile x_2 , ecc. Ad ogni integrazione per parti si guadagna un meno e ci sono $|\alpha|$ integrazioni per parti in tutto. Tale formula si può ora utilizzare per definire $D^\alpha f$ per $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ [oppure: per $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$]. La derivazione $D^\alpha f$ non è quella classica. Tale derivazione si chiama *derivazione debole*.¹ La derivazione debole è una trasformazione lineare continua nel seguente senso: Se $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ è una successione che converge a $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (risp., a $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$), allora $\{D^\alpha f_m\}_{m=1}^\infty$ converge a $D^\alpha f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (risp., a $D^\alpha f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$). Ciò è chiaro, poichè

$$(D^\alpha f_m, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f_m, D^\alpha \varphi) \rightarrow (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) = (D^\alpha f, \varphi),$$

qualunque sia la funzione test φ .

Per esempio, calcoliamo ora la derivata debole H'_{x_0} della funzione di Heaviside H_{x_0} , dove $x_0 \in \mathbb{R}$. Infatti, per $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha

$$(H'_{x_0}, \varphi) = -(H_{x_0}, \varphi') = - \int_{x_0}^{\infty} \varphi'(x) dx = - [\varphi(x)]_{x=x_0}^{\infty} = \varphi(x_0) = (\delta_{x_0}, \varphi),$$

e quindi

$$H'_{x_0} = \delta_{x_0},$$

essendo la distribuzione delta di Dirac. Purtroppo, non vale la relazione

$$\frac{d}{dx} H(x - x_0) = \delta(x - x_0)$$

in modo classico, poichè la derivata classica non esiste per $x = x_0$.

4 Trasformata di Fourier

4.1 Trasformata di Fourier negli spazi L^1 e L^2

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione sommabile. Allora l'integrale (di Lebesgue)

$$\hat{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} F[f](\xi) = \int f(x) e^{-i(\xi, x)} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

è assolutamente convergente e $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$, dove $\|f\|_1 = \int |f(x)| dx$ è la norma L^1 di f . In tal caso si definisce una funzione

$$\xi \xrightarrow{\hat{f}} F[f](\xi) = \hat{f}(\xi)$$

¹Tecnicamente i due pairing $(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ e $(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ conducono a due derivazioni deboli diversi, ma in pratica non c'è alcuna differenza, poichè le nostre distribuzioni appartengono a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

su \mathbb{R}^n che si chiama la *trasformata di Fourier* della f . Segue che $\hat{f}(\xi)$ è continua in $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Proposizione C.7 Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $F[f](\xi)$ è continua in $\xi \in \mathbb{R}^n$ e tende a zero se $|\xi| \rightarrow +\infty$.²

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $F[f], F[g] \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. In tal caso risulta per $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (\hat{f}, g) &= \int \left[\int f(x) e^{-i(x,\xi)} dx \right] g(\xi) d\xi \\ &= \int f(x) \left[\int g(\xi) e^{-i(\xi,x)} d\xi \right] dx = (f, \hat{g}); \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} (\hat{f}, g)_c &= \int \left[\int f(x) e^{-i(x,\xi)} dx \right] \overline{g(\xi)} d\xi \\ &= \int f(x) \left[\int g(\xi) e^{i(\xi,x)} d\xi \right] dx = (f, \hat{g}(-\xi))_c. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Inoltre, $(\cdot, \cdot)_c$ è il prodotto scalare complesso di $L^2(\mathbb{R}^n)$, mentre (\cdot, \cdot) è quello reale.

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora il prodotto di convoluzione

$$(f * g)(x) = \int f(y) g(x - y) dy = \int f(x - y) g(y) dy$$

conduce ad una funzione $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Segue che

$$f * g = g * f, \quad (f * g) * h = f * (g * h),$$

dove $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Applicando la trasformazione $z = x - y$ con y fissato si ha

$$\begin{aligned} F[f * g](\xi) &= \int \left(\int f(y) g(x - y) dy \right) e^{-i(x,\xi)} dx \\ &= \int \left(\int f(y) e^{-i(y,\xi)} g(z) e^{-i(z,\xi)} dy \right) dz = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

In altre parole, la trasformata di Fourier manda $L^1(\mathbb{R}^n)$ con il prodotto di convoluzione in $C(\mathbb{R}^n)$ con il prodotto algebrico usuale.

Consideriamo ora la trasformata di Fourier su $L^2(\mathbb{R}^n)$.

²La seconda parte si chiama il Lemma di Riemann-Lebesgue.

Teorema C.8 (di Plancherel). Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int |f(x)|^2 dx. \quad (\text{C.4})$$

Inoltre, F ammette un'estensione lineare ad $L^2(\mathbb{R}^n)$ che soddisfa (C.4) per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ed è un operatore invertibile su $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Prima diamo la dimostrazione per $n = 1$.

Sia f una funzione continua e regolare a tratti con supporto in $(-\pi, \pi)$. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f in $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

dove $c_n = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = (2\pi)^{-1} \hat{f}(n)$ e

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right) \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2. \end{aligned}$$

Siccome $c_n [e^{-ixt} f] = (2\pi)^{-1} \hat{f}(n+t)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$ e $|f(x)|^2 = |e^{-ixt} f(x)|^2$, risulta

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |\hat{f}(n+t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Se f ha supporto compatto in \mathbb{R} , si scelga $c > 0$ tale che $g(x) = c^{1/2} f(cx)$ ha supporto in $(-\pi, \pi)$. In tal caso

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, approssimiamo f da funzioni continue e regolari a tratti con supporto compatto e troviamo la stessa relazione.

L'equazione (C.4) dimostra che F può essere estesa ad un operatore lineare F da $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ che soddisfa (C.4). Infine, siccome F manda il sottospazio denso $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ di $L^2(\mathbb{R})$ nel sottospazio denso $C(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ di $L^2(\mathbb{R})$ e l'immagine di F è chiuso, F è un operatore invertibile su $L^2(\mathbb{R})$.

La generalizzazione ad $n \in \mathbb{N}$ segue applicando n trasformazioni di Fourier unidimensionali in seguito. \square

Corollario C.9 *Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora l'operatore inverso ha la forma*

$$F^{-1}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f](-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(x) e^{-i(x,\xi)} dx. \quad (\text{C.5})$$

Dimostrazione. Si ricordi che $(\cdot, \cdot)_c$ è il prodotto scalare complesso in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora per $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ segue

$$(F[f], g)_c = (F[f], \bar{g}) = (f, F[\bar{g}]) = (f, F[g](-\xi))_c,$$

e questa relazione si generalizza per $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dalla (C.4) segue che

$$(f, g)_c = (2\pi)^{-n} (F[f], F[g])_c = (2\pi)^{-n} (f, F[F[g]](-\xi))_c,$$

dove $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Siccome f, g sono arbitrarie, è valida la (C.5). \square

Dal Corollario C.9 si vede subito che $(2\pi)^{-n/2} F$ è un operatore lineare unitario sullo spazio di Hilbert complesso $L^2(\mathbb{R}^n)$. L'applicazione dell'operatore lineare $(2\pi)^{-n/2} F$ ad una funzione $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ non ne cambia la norma L^2 .

4.2 Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

La proprietà rimarchevole della classe $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ consiste nel fatto che l'operazione di trasformazione di Fourier non porta fuori dai limiti di questa classe.

4.2.a Trasformazione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Visto che le funzioni appartenenti a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sono sommabili in \mathbb{R}^n , su queste funzioni è definita l'operazione F di trasformazione di Fourier

$$\hat{\varphi}(\xi) = F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x) e^{-i(\xi,x)} dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

In questo caso la funzione $F[\varphi](\xi)$ la quale rappresenta la *trasformata di Fourier* della funzione φ , è limitata e continua in \mathbb{R}^n . La funzione φ decresce

all'infinito più rapidamente di qualunque potenza positiva di $1/|x|$ e perciò la sua trasformata di Fourier può essere derivata sotto il segno d'integrale un numero di volte arbitrario:

$$D^\alpha F[\varphi](\xi) = \int (-ix)^\alpha \varphi(x) e^{-i(\xi,x)} dx = F[(-ix)^\alpha \varphi](\xi), \quad (\text{C.6})$$

da cui segue che $\hat{f} = F[\varphi] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, possiede le stesse proprietà ogni derivata $D^\beta \varphi$ e quindi

$$\begin{aligned} F[D^\beta \varphi](\xi) &= \int (D^\beta \varphi(x)) e^{-i(\xi,x)} dx = (-1)^{|\beta|} \int \varphi(x) (D^\beta e^{-i(\xi,x)}) dx \\ &= (-1)^{|\beta|} (-i\xi)^\beta \int \varphi(x) e^{-i(\xi,x)} dx = (i\xi)^\beta \int \varphi(x) e^{-i(\xi,x)} dx. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Infine, dalle formule (C.6) e (C.7) si ottiene

$$\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\beta|} (i\xi)^\beta F[(-ix)^\alpha \varphi](\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} F[D^\beta (x^\alpha \varphi)](\xi). \quad (\text{C.8})$$

Dall'uguaglianza (C.8) segue che per tutti gli α, β i valori di $\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)$ sono uniformemente limitati rispetto a $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)| \leq \int |D^\beta (x^\alpha \varphi)| dx. \quad (\text{C.9})$$

Ciò vuol dire che $F[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dunque, la trasformata di Fourier trasforma lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in se stesso.

Visto che la trasformata di Fourier $F[\varphi]$ di una funzione φ appartenente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è una funzione sommabile e continuamente derivabile su \mathbb{R}^n , allora, siccome $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la funzione φ è espressa in termini della sua trasformata di Fourier $F[\varphi]$ mediante l'operazione di trasformazione inversa di Fourier F^{-1} :

$$\varphi = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \quad (\text{C.10})$$

dove

$$\begin{aligned} F^{-1}[\psi](x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(\xi) e^{i(\xi,x)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi](-x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(-\xi) e^{-i(\xi,x)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(-\xi)](x). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Dalle formule (C.10) e (C.11) deriva che ogni funzione φ appartenente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è la trasformata di Fourier della funzione $\psi = F^{-1}[\varphi]$ appartenente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, con $\varphi = F[\psi]$, e se $F[\varphi] = 0$, anche $\varphi = 0$. Ciò vuol dire che la trasformazione di Fourier F trasforma $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre in modo univoco.

Lemma C.10 *La trasformazione di Fourier F è un'applicazione continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\varphi_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora, applicando la (C.9) alle funzioni φ_k , si ottiene per tutti gli α, β

$$\begin{aligned} |\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| &\leq \int |D^\beta(x^\alpha \varphi_k)| dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\beta(x^\alpha \varphi_k)|(1 + |x|)^{n+1} \int \frac{dy}{(1 + |y|)^{n+1}}, \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| = 0,$$

cioè $F[\varphi_k] \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il lemma è dimostrato. \square

La trasformazione inversa di Fourier F^{-1} possiede proprietà analoghe.

4.2.b Trasformazione di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Assumiamo l'uguaglianza (C.1) come definizione di trasformata di Fourier $F[f]$ di qualunque distribuzione $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (\text{C.12})$$

Verifichiamo che il secondo membro di quest'uguaglianza definisce un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cioè che $F[f] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Infatti, visto che $F[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \mapsto (f, F[\varphi])$ è un funzionale lineare su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo che $\varphi_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Per il Lemma 3.1, $F[\varphi_k] \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e quindi, in virtù del fatto che f appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha $(f, F[\varphi_k]) \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$, di modo che il funzionale $\varphi \mapsto (f, F[\varphi])$ è continuo su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dunque, l'operazione di trasformazione di Fourier F porta lo spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Inoltre, F è un'operazione lineare e continua da $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La linearità di F è evidente. Dimostriamo la sua continuità. Supponiamo che $f_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. In questo caso, in base alla (C.12), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(F[f_k], \varphi) = (f_k, F[\varphi]) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Ciò significa che $F[f_k] \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, cioè l'operazione F è continua da $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Introduciamo in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ancora un'operazione di trasformazione di Fourier che denotiamo con F^{-1} :

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)], \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (\text{C.13})$$

Dimostriamo che l'operazione F^{-1} è un'operazione inversa di F , cioè

$$F^{-1}[F[f]] = f, \quad F[F^{-1}[f]] = f, \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (\text{C.14})$$

Infatti, dalle (C.10)-(C.13) per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ottengono le uguaglianze

$$\begin{aligned} (F^{-1}[F[f]], \varphi) &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[F[f]](-\xi), \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f](-\xi), F[\varphi]) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f], F[\varphi](-\xi)) = (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) \\ &= (f, \varphi) = (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (F[F^{-1}[f]], \varphi), \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le corrispondenti proprietà in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ al sesto ed al settimo passaggio.³ Ora seguono le formule (C.14).

Dalle formule (C.14) deriva che ogni distribuzione f appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è la trasformata di Fourier della distribuzione $g = F^{-1}[f]$ appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, con $f = F[g]$, e se $F[f] = 0$, si ha anche $f = 0$. Abbiamo, quindi, dimostrato che le trasformazioni di Fourier F e F^{-1} trasformano $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in modo biunivoco e continuo.

Supponiamo che $f = f(x, y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ dove $x \in \mathbb{R}^n$ ed $y \in \mathbb{R}^m$. Introduciamo la trasformata di Fourier $F_x[f]$ rispetto alle variabili $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ponendo per qualunque $\varphi = \varphi(x, y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$

$$(F_x[f], \varphi) = (f, F_\xi[\varphi]). \quad (\text{C.15})$$

Come nel Lemma 3.1, si stabilisce che

$$F_\xi[\varphi](x, y) = \int \varphi(\xi, y) e^{i(\xi, x)} d\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$$

e l'operazione $F_\xi[\varphi]$ è continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, di modo che la formula (C.15) definisce realmente una distribuzione $F_x[f](\xi, y)$ appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Esempio. Dimostriamo che

$$F[\delta(x - x_0)] = e^{-i(\xi, x_0)}. \quad (\text{C.16})$$

³Si noti che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$.

Infatti,

$$\begin{aligned} (F[\delta(x - x_0)], \varphi) &= (\delta(x - x_0), F[\varphi]) = F[\varphi](x_0) \\ &= \int \varphi(\xi) e^{-i(\xi, x_0)} d\xi = (e^{-i(\xi, x_0)}, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Ponendo nella (C.16) $x_0 = 0$, si ottiene

$$F[\delta] = 1, \quad (\text{C.17})$$

da cui

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

di modo che

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi). \quad (\text{C.18})$$

4.2.c Proprietà della trasformazione di Fourier

(a) **Derivazione della trasformata di Fourier.** Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$D^\alpha F[f] = F[(-ix)^\alpha f]. \quad (\text{C.19})$$

Infatti, utilizzando la (C.7), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (D^\alpha F[f], \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} (F[f], D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, F[D^\alpha \varphi]) \\ &= (-1)^{|\alpha|} (f, (ix)^\alpha F[\varphi]) = ((-ix)^\alpha f, F[\varphi]) = (F[(ix)^\alpha f], \varphi), \end{aligned}$$

da cui segue la formula (C.19). In particolare, ponendo nella (C.19) $f = 1$ ed utilizzando la formula (C.18), abbiamo

$$F[x^\alpha](\xi) = i^{|\alpha|} D^\alpha F[1](\xi) = (2\pi)^n i^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi). \quad (\text{C.20})$$

(b) **Trasformata di Fourier della derivata.** Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$F[D^\beta f] = (i\xi)^\beta F[f]. \quad (\text{C.21})$$

Infatti, utilizzando la formula (C.6), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (F[D^\beta f], \varphi) &= (D^\beta f, F[\varphi]) = (-1)^{|\beta|} (f, D^\beta F[\varphi]) \\ &= (-1)^{|\beta|} (f, F[(-i\xi)^\beta \varphi]) = (-1)^{|\beta|} (F[f], (-i\xi)^\beta \varphi) = ((i\xi)^\beta F[f], \varphi), \end{aligned}$$

da cui segue la formula (C.21).

(c) **Trasformata di Fourier di una traslazione.** Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$F[f(x - x_0)] = e^{-i(x_0, x)} F[f]. \quad (\text{C.22})$$

Infatti, abbiamo per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (F[f(x - x_0)], \varphi) &= (f(x - x_0), F[\varphi]) = (f, F[\varphi](x + x_0)) \\ &= (f, F[\varphi e^{-i(x_0, \xi)}]) = (F[f], e^{-i(x_0, \xi)} \varphi) = (e^{-i(x_0, \xi)} F[f], \varphi), \end{aligned}$$

da cui segue la formula (C.22).

(d) **Traslazione della trasformata di Fourier.** Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$F[f](\xi + \xi_0) = F[e^{i(\xi_0, x)} f](\xi). \quad (\text{C.23})$$

Infatti, utilizzando la formula (C.22), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} F[f](\xi + \xi_0), \varphi) &= (F[f], \varphi(\xi - \xi_0)) = (f, F[\varphi(\xi - \xi_0)]) \\ &= (f, e^{i(\xi_0, x)} F[\varphi]) = (e^{i(\xi_0, x)} f, F[\varphi]) = (F[e^{i(\xi_0, x)} f], \varphi), \end{aligned}$$

da cui segue la formula (C.23).

(e) **Trasformata di Fourier di rescaling.** Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, per tutti i valori reali di $c \neq 0$ si ha

$$F[f(cx)](\xi) = \frac{1}{|c|^n} F[f] \left(\frac{\xi}{c} \right), \quad (\text{C.24})$$

poichè per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ abbiamo

$$\begin{aligned} (F[f(cx)], \varphi) &= (f(cx), F[\varphi]) = \frac{1}{|c|^n} \left(f, F[\varphi] \left(\frac{x}{c} \right) \right) \\ &= \frac{1}{|c|^n} \left(f, \int \varphi(\xi) e^{-i(\frac{x}{c}, \xi)} d\xi \right) = \left(f, \int \varphi(c\xi') e^{-i(x, \xi')} d\xi' \right) = (f, F[\varphi(c\xi)]) \\ &= (F[f], \varphi(c\xi)) = \frac{1}{|c|^n} \left(F[f] \left(\frac{\xi}{c} \right), \varphi \right). \end{aligned}$$

5 Distribuzione in un Dominio

Sia Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n . Allora $\mathcal{D}(\Omega)$ sarà lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^∞ che si annullano fuori di un sottoinsieme chiuso e limitato di Ω . Una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ è detta di convergere a φ se esiste un sottoinsieme chiuso e limitato K di Ω fuori del quale

si annullano tutte le funzioni φ_m e tale che $(D^\alpha \varphi_m)(x)$ tende a $(D^\alpha \varphi)(x)$ uniformemente in $x \in K$. Osserviamo che per $\Omega = \mathbb{R}^n$ la definizione di convergenza coincide con quella precedente. Evidentemente ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ può essere estesa ad una funzione test in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definendola uguale a zero fuori del dominio Ω . Di conseguenza, le distribuzioni appartenenti a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si possono applicare alle (estensioni delle) funzioni test in $\mathcal{D}(\Omega)$. Ora definiamo $\mathcal{D}'(\Omega)$ come lo spazio vettoriale di tutti i funzionali lineari f in $\mathcal{D}(\Omega)$ che sono continui nel seguente senso: Se $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ converge a φ in $\mathcal{D}(\Omega)$, allora $(f, \varphi_m) \rightarrow (f, \varphi)$. In particolare, se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ si annulla fuori di Ω quasi ovunque, allora $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Più precisamente,

$$(f, \varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Le derivazioni deboli si definiscono ora in $\mathcal{D}'(\Omega)$ in modo naturale:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad f \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

qualunque sia il multiindice α .

Bibliografia

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ., New York, 1964.
- [2] L. Brillouin, *Wave Propagation in Periodic Structures*, Dover Publ., New York, 1953.
- [3] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Graduate Texts in Mathematics **11**, Springer, Berlin, 1975.
- [4] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vols. 1-2, Wiley-Interscience, 1989.
- [5] M.S.P. Eastham, *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*, Scottish Academic Press, Edinburgh, 1973.
- [6] Enrico Giusti, *Analisi Matematica* 1-2 (due volumi), Bollati Boringhieri, Torino, 1989.
- [7] N.N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover Publ., New York, 1965.
- [8] R.G. Newton, *Scattering of Waves and Particles*, Springer, New York, 1982; Dover, New York, 2002.
- [9] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, 2 vols., Hermann, Paris, 1966.
- [10] I.N. Sneddon, *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1956.
- [11] Murray R. Spiegel, *Vector Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York 1959 (traduzione italiana: *Analisi Vettoriale*).
- [12] Gabor Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **23**, 1939; Reprinted 1991.

- [13] A.N. Tichonov e A.A. Samarskij, *Equazioni della Fisica Matematica*, Ed. Mir, Mosca, 1981.
- [14] V.S. Vladimirov, *Equazioni della Fisica Matematica*, Mir Italia-URSS, Mosca, 1987; anche Nauka, Mosca, 1981 [in Russo].
- [15] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second Ed., Cambridge University Press, London, 1962.
- [16] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Fourth ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.