Capitolo 1

Funzioni Test, Distribuzioni e Applicazioni

In questo capitolo discuteremo le distribuzioni, le funzioni test e loro applicazioni principali. Il motivo principale per introdurre le distribuzioni nella seconda metà degli anno 40 è stato la giustificazione rigorosamente matematica della funzione delta di Dirac utilizzata in fisica teorica. Secondo i libri di testo in fisica la funzione $\delta(x-x_0)$ è una funzione con valori uguali a zero per $x \neq x_0$, con il valore $+\infty$ per $x = x_0$ e tale che l'integrale $\int \delta(x-x_0)\,dx = 1$. Una tale funzione non si puo' inquadrare nell'ambito delle funzioni misurabli, poichè essa si annulla quasi ovunque ma il suo integrale è uguale a 1. D'altra parte, se $f(x)$ è una funzione, si ha

$$\int f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0).$$

Quindi si potrebbe inquadrare la funzione delta di Dirac come l'applicazione lineare $f \mapsto f(x_0)$ applicata ad un'opportuna classe di funzioni test f. Siccome deve avere senso il valore della f nel punto x_0, la f deve essere almeno continua.

Una possibile descrizione della funzione delta è la sua rappresentazione come caso limite di una successione $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ di funzioni δ_n abbastanza regolari tali che

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)\delta_n(x-x_0)\,dx = f(x_0)$$

per un'opportuna classe di funzioni test f. Per esempio, se il dominio della funzione delta fosse la retta reale, ci sarebbero le seguenti possibilità:

a. $\delta_n(x) = n$ per $|x| < \frac{1}{2n}$ e $\delta_n(x) = 0$ per $|x| > \frac{1}{2n}$;

b. $\delta_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{1+n^2x^2}$;

c. $\delta_n(x) = \sqrt{\dfrac{n}{\pi}}\, e^{-nx^2}$;

d. $\delta_n(x) = -n$ per $|x| < \frac{1}{2n}$, $\delta_n(x) = 2n$ per $\frac{1}{2n} \leq |x| \leq \frac{1}{n}$ e $\delta_n(x) = 0$ per $|x| > \frac{1}{n}$.

Osserviamo che 1) $\delta_n(x - x_0)$ ha una peak per $x = x_0$, 2) tende all'infinito se $x = x_0$, 3) tende a zero se $x \neq x_0$, e 4) verifica $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\,dx = 1$.

1.1 Funzionali Lineari

Sia X uno spazio di Banach reale o complesso (cioè $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Un'applicazioni lineare $\Phi : X \to \mathbb{F}$ tale che

$$|\Phi\varphi| \leq \text{cost.}\|\varphi\|, \qquad \varphi \in X,$$

si dice *funzionale lineare continuo* in X. Utilizzando

$$\|\Phi\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|\Phi\varphi\|$$

per normalizzare i funzionali lineari continui si ottiene uno spazio di Banach X^*, il cosiddetto *spazio duale.*

Se $X = \mathbb{F}^n$ ha dimensione finita n, esiste una corrispondenza biunivoca tra i funzionali lineari (continui) e i vettori $\psi \in \mathbb{F}^n$, dove

$$\Phi\varphi = (\varphi, \psi) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \varphi_k\psi_k, & \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \sum_{k=1}^n \varphi_k\overline{\psi}_k, & \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

per $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ e $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$. Inoltre, se la norma è quella euclidea, si ha $\|\Phi\| = \|\psi\|$. Di conseguenza, X^* ha la stessa struttura di X.

Se X è uno spazio di Hilbert, esiste un'analoga corrispondenza biunivoca tra i funzionali lineari continui Φ in X e i vettori di X. Secondo il Teorema di Rappresentazione di Riesz (Riesz' representation theorem), per ogni $\Phi \in X^*$ esiste $\psi \in X$ tale che

$$\Phi\varphi = (\varphi, \psi), \qquad \varphi \in X.$$

Inoltre, $\|\Phi\| = \|\psi\|$.

Generalmente X^* non ha la stessa struttura di X se X è uno spazio di Banach separabile.

1.2 Funzioni Test

Sia $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ che si annullano fuori di un insieme limitato. Allora gli elementi di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ si chiamano *funzioni test.* Per esempio,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - a^2}\right), & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases}$$

dove $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si vede facilmente che

a. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale;

b. Se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

appartiene a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Si dice che una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ converge a φ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ se esiste un insieme limitato K tale che $\varphi_m(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ (qualunque sia m) e se $D^\alpha \varphi_m(x) \to D^\alpha \varphi(x)$ uniformemente in $x \in K$, qualunque sia il multiindice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Spesso la terminologia funzione test viene utilizzata per gli elementi di uno spazio vettoriale $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ più esteso di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Poniamo

$$(1+|x|)^\beta = (1+|x_1|)^{\beta_1} \ldots (1+|x_n|)^{\beta_n},\ x=(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Allora una funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ appartiene ad $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se essa è di classe C^∞ e $(1 + |x|)^\beta (D^\alpha \varphi)(x)$ tende a zero se $|x| \to \infty$, qualunque siano i multiindici α, β. Si vede facilmente che

a. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale;

b. Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Si dice che una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ converge a φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se, per ogni insieme limitato K, $(1+|x|)^\beta (D^\alpha \varphi_m)(x) \to (1+|x|)^\beta (D^\alpha \varphi)(x)$ uniformemente in $x \in K$, qualunque siano i multiindici $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

È chiaro che

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n).$$

La vera sorpresa è che $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sia un sottospazio lineare denso in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

1.3 Distribuzioni

Una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si dice *localmente sommabile* se converge finito l'integrale $\int_E |f(x)|\, dx$ per ogni regione limitata E in $\mathbb{R}^n$. L'insieme di tutte le funzioni localmente sommabili è uno spazio vettoriale: $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Essenzialmente una distribuzione è un funzionale lineare: Per una distribuzione f e una funzione test φ si consideri il prodotto scalare (inglese: pairing)

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Purtroppo, invece di considerare due funzioni $f, \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si prendano una distribuzione f in uno spazio vettoriale più esteso e una funzione test φ in uno spazio vettoriale più ristretto tali che

$$\lim_{m\to\infty} (f, \varphi_m) = (f, \varphi)$$

per ogni successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ che converge a φ.

Più precisamente, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme di tutti i funzionali lineari f in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$\lim_{m\to\infty} (f, \varphi_m) = (f, \varphi)$$

per ogni successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ che converge a φ. Identificando $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ con il funzionale lineare

$$\varphi \mapsto (f,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_K f(x)\varphi(x)\,dx,$$

dove K è una regione limitato K fuori della quale si annulla la φ, si vede facilmente che

$$L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Ovviamente $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale.

In modo analogo si definisce $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come l'insieme di tutti i funzionali f in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$\lim_{m\to\infty} (f,\varphi_m) = (f,\varphi)$$

per ogni successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ che converge a φ. Ovviamente $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale tale che

$$L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Purtroppo esistono funzioni localmente sommabili non contenute in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Per esempio, $e^{|x|}$ appartiene ad $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ma non appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Fortunatamente le distribuzioni che importano alle applicazioni principali, appartengono a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (e quindi a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$).

Una successione $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (risp., in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ converge a φ se

$$\lim_{m\to\infty} (f_m,\varphi) = (f,\varphi)$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (risp., per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).

Discutiamo ora alcuni esempi.

a. Dato il punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il funzionale

$$\varphi \mapsto \varphi(x_0)$$

appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (e quindi a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$), poichè per una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ convergente a φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha $\varphi_m(x_0) \to \varphi(x_0)$. Questa distribuzione si chiama la distribuzione delta di Dirac:

$$(\delta_{x_0},\varphi) = \varphi(x_0).$$

b. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, il funzionale

$$\varphi \mapsto \int_{x_0} \varphi(x)\, dx$$

appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (e quindi a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$), poichè per una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ convergente a φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi_m(x_0)\, dx \to \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x)\, dx.$$

Questa distribuzione si chiama la funzione di Heaviside:

$$(H_{x_0}, \varphi) = \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(x - x_0)\varphi(x)\, dx.$$

Si vede facilmente che $H(\cdot - x_0) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

c. Una funzione localmente sommabile tale che per un certo $m \geq 0$

$$\int |f(x)|(1 + |x|)^{-m}\, dx < +\infty,$$

appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Per due funzioni $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cioè per due funzioni $f, \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ che si annullano rapidamente se $|x| \to \infty$, abbiamo

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi),$$

qualunque sia il multiindice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e per $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Infatti, per dimostrarlo si facciamo α_1 integrazioni per parti rispetto alla variabile x_1, α_2 integrazioni per parti rispetto alla variabile x_2, ecc. Ad ogni integrazione per parti si guadagna un meno e ci sono $|\alpha|$ integrazioni per parti in tutto. Tale formula si può ora utilizzare per definire $D^\alpha f$ per $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ [oppure: per $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$]. La derivazione $D^\alpha f$ non è quella classica. Tale derivazione si chiama *derivazione debole*.[1] La derivazione debole è una trasformazione lineare continua nel seguente senso: Se $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$

[1] Tecnicamente i due pairing $(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ e $(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ conducono a due derivazioni deboli diversi, ma in pratica non c'è alcuna differenza, poichè le nostre distribuzioni appartengono a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

è una successione che converge a $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (risp., a $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$), allora $\{D^\alpha f_m\}_{m=1}^\infty$ converge a $D^\alpha f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (risp., a $D^\alpha f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$). Ciò è chiaro, poichè

$$(D^\alpha f_m, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f_m, D^\alpha \varphi) \to (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi) = (D^\alpha f, \varphi),$$

qualunque sia la funzione test φ.

Per esempio, calcoliamo ora la derivata debole H'_{x_0} della funzione di Heaviside H_{x_0}, dove $x_0 \in \mathbb{R}$. Infatti, per $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha

$$(H'_{x_0}, \varphi) = -(H_{x_0}, \varphi') = -\int_{x_0}^\infty \varphi'(x)\, dx = -\left[\varphi(x)\right]_{x=x_0}^\infty = \varphi(x_0) = (\delta_{x_0}, \varphi),$$

e quindi

$$H'_{x_0} = \delta_{x_0},$$

essendo la distribuzione delta di Dirac. Purtroppo, non vale la relazione

$$\frac{d}{dx}\, H(x - x_0) = \delta(x - x_0)$$

in modo classico, poichè la derivata classica non esiste per $x = x_0$.

1.4 Trasformata di Fourier

1.4.1 Trasformata di Fourier negli spazi L^1 e L^2

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una funzione sommabile. Allora l'integrale (di Lebesgue)

$$\hat{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} F[f](\xi) = \int f(x) e^{-i(\xi, x)}\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

è assolutamente convergente e $|\hat{f}(\xi)| \le \|f\|_1$, dove $\|f\|_1 = \int |f(x)|\, dx$ è la norma L^1 di f. In tal caso si definisce una funzione

$$\xi \stackrel{\hat{f}}{\mapsto} F[f](\xi) = \hat{f}(\xi)$$

su $\mathbb{R}^n$ che si chiama la *trasformata di Fourier* della f. Segue che $\hat{f}(\xi)$ è continua in $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Proposizione 1 *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $F[f](\xi)$ è continua in $\xi \in \mathbb{R}^n$ e tende a zero se $|\xi| \to +\infty$.*[2]

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $F[f], F[g] \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. In tal caso risulta per $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}(\hat{f}, g) &= \int \left[\int f(x) e^{-i(x,\xi)}\, dx \right] g(\xi)\, d\xi \\ &= \int f(x) \left[\int g(\xi) e^{-i(\xi,x)}\, d\xi \right] dx = (f, \hat{g});\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}(\hat{f}, g)_c &= \int \left[\int f(x) e^{-i(x,\xi)} dx \right] \overline{g(\xi)} d\xi \\ &= \int f(x) \left[\overline{\int g(\xi) e^{i(\xi,x)} d\xi} \right] dx = (f, \hat{g}(-\xi))_c.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Inoltre, $(\cdot, \cdot)_c$ è il prodotto scalare complesso di $L^2(\mathbb{R}^n)$, mentre $(\cdot, \cdot)$ è quello reale.

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora il prodotto di convoluzione

$$(f * g)(x) = \int f(y) g(x-y)\, dy = \int f(x-y) g(y)\, dy$$

conduce ad una funzione $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Segue che

$$f * g = g * f, \qquad (f * g) * h = f * (g * h),$$

dove $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Applicando la trasformazione $z = x - y$ con y fissato si ha

$$\begin{aligned}F[f * g](\xi) &= \int \left(\int f(y) g(x-y)\, dy \right) e^{-i(x,\xi)}\, dx \\ &= \int \left(\int f(y) e^{-i(y,\xi)} g(z) e^{-i(z,\xi)}\, dy \right) dz = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).\end{aligned} \tag{1.3}$$

In altre parole, la trasformata di Fourier manda $L^1(\mathbb{R}^n)$ con il prodotto di convoluzione in $C(\mathbb{R}^n)$ con il prodotto algebrico usuale.

Consideriamo ora la trasformata di Fourier su $L^2(\mathbb{R}^n)$.

---

[2] La seconda parte si chiama il Lemma di Riemann-Lebesgue.

Teorema 2 (*di Plancherel*). *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = \int |f(x)|^2 \, dx. \tag{1.4}$$

Inoltre, F ammette un'estensione lineare ad $L^2(\mathbb{R}^n)$ che soddisfa (1.4) per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ed è un operatore invertibile su $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Prima diamo la dimostrazione per $n = 1$.

Sia f una funzione continua e regolare a tratti con supporto in $(-\pi, \pi)$. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f in $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

dove $c_n = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = (2\pi)^{-1} \hat{f}(n)$ e

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx &= \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right) \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2. \end{aligned}$$

Siccome $c_n[e^{-ixt} f] = (2\pi)^{-1} \hat{f}(n + t)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$ e $|f(x)|^2 = |e^{-ixt} f(x)|^2$, risulta

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx &= \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |\hat{f}(n + t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi. \end{aligned}$$

Se f ha supporto compatto in $\mathbb{R}$, si scelga $c > 0$ tale che $g(x) = c^{1/2} f(cx)$ ha supporto in $(-\pi, \pi)$. In tal caso

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi)|^2 \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi. \end{aligned}$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, approssimiamo f da funzioni continue e regolari a tratti con supporto compatto e troviamo la stessa relazione.

L'equazione (1.4) dimostra che F può essere estesa ad un operatore lineare F da $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ che soddisfa (1.4). Infine, siccome F manda il sottospazio denso $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ di $L^2(\mathbb{R})$ nel sottospazio denso $C(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ di $L^2(\mathbb{R})$ e l'immagine di F è chiuso, F è un operatore invertibile su $L^2(\mathbb{R})$.

La generalizzazione ad $n \in \mathbb{N}$ segue applicando n trasformazioni di Fourier unidimensionali in seguito. $\square$

Corollario 3 *Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora l'operatore inverso ha la forma*

$$F^{-1}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f](-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(x) e^{-i(x,\xi)}\, dx. \tag{1.5}$$

Dimostrazione. Si ricordi che $(\cdot,\cdot)_c$ è il prodotto scalare complesso in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora per $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ segue

$$(F[f], g)_c = (F[f], \overline{g}) = (f, F[\overline{g}]) = (f, F[g](-\xi))_c,$$

e questa relazione si generalizza per $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dalla (1.4) segue che

$$(f, g)_c = (2\pi)^{-n} (F[f], F[g])_c = (2\pi)^{-n} (f, F[F[g]](-\xi))_c,$$

dove $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Siccome f, g sono arbitrarie, è valida la (1.5). $\square$

Dal Corollario 3 si vede subito che $(2\pi)^{-n/2} F$ è un operatore lineare unitario sullo spazio di Hilbert complesso $L^2(\mathbb{R}^n)$. L'applicazione dell'operatore lineare $(2\pi)^{-n/2} F$ ad una funzione $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ non ne cambia la norma L^2.

1.4.2 Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

La proprietà rimarchevole della classe $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ consiste nel fatto che l'operazione di trasformazione di Fourier non porta fuori dai limiti di questa classe.

Trasformazione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Visto che le funzioni appartenenti a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sono sommabili in $\mathbb{R}^n$, su queste funzioni è definita l'operazione F di trasformazione di Fourier

$$\hat{\varphi}(\xi) = F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x) e^{-i(\xi,x)}\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

In questo caso la funzione $F[\varphi](\xi)$ la quale rappresenta la *trasformata di Fourier* della funzione φ, è limitata e continua in $\mathbb{R}^n$. La funzione φ decresce all'infinito più rapidamente di qualunque potenza positiva di $1/|x|$ e perciò la sua trasformata di Fourier può essere derivata sotto il segno d'integrale un numero di volte arbitrario:

$$D^\alpha F[\varphi](\xi) = \int (-ix)^\alpha \varphi(x) e^{-i(\xi,x)}\, dx = F[(-ix)^\alpha \varphi](\xi), \tag{1.6}$$

da cui segue che $\hat{f} = F[\varphi] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, possiede le stesse proprietà ogni derivata $D^\beta \varphi$ e quindi

$$\begin{aligned} F[D^\beta \varphi](\xi) &= \int \left(D^\beta \varphi(x)\right) e^{-i(\xi,x)}\, dx = (-1)^{|\beta|} \int \varphi(x) \left(D^\beta e^{-i(\xi,x)}\right) dx \\ &= (-1)^{|\beta|}(-i\xi)^\beta \int \varphi(x) e^{-i(\xi,x)}\, dx = (i\xi)^\beta \int \varphi(x) e^{-i(\xi,x)}\, dx. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Infine, dalle formule (1.6) e (1.7) si ottiene

$$\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\beta|}(i\xi)^\beta F[(-ix)^\alpha \varphi](\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} F[D^\beta(x^\alpha \varphi)](\xi). \tag{1.8}$$

Dall'uguaglianza (1.8) segue che per tutti gli α, β i valori di $\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)$ sono uniformemente limitati rispetto a $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)| \leq \int |D^\beta(x^\alpha \varphi)|\, dx. \tag{1.9}$$

Ciò vuol dire che $F[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dunque, la trasformata di Fourier trasforma lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in se stesso.

Visto che la trasformata di Fourier $F[\varphi]$ di una funzione φ appartenente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è una funzione sommabile e continuamente derivabile su $\mathbb{R}^n$, allora, siccome $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la funzione φ è espressa in termini della sua trasformata di Fourier $F[\varphi]$ mediante l'operazione di trasformazione inversa di Fourier F^{-1}:

$$\varphi = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \tag{1.10}$$

dove

$$\begin{aligned} F^{-1}[\psi](x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(\xi) e^{i(\xi,x)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi](-x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(-\xi) e^{-i(\xi,x)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(-\xi)](x). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dalle formule (1.10) e (1.11) deriva che ogni funzione φ appartenente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è la trasformata di Fourier della funzione $\psi = F^{-1}[\varphi]$ appartenente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, con $\varphi = F[\psi]$, e se $F[\varphi] = 0$, anche $\varphi = 0$. Ciò vuol dire che la trasformazione di Fourier F trasforma $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre in modo univoco.

Lemma 4 *La trasformazione di Fourier F è continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$ per $k \to +\infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora, applicando la (1.9) alle funzioni φ_k, si ottiene per tutti gli α, β

$$\begin{aligned} |\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| &\leq \int |D^\beta(x^\alpha \varphi_k)|\, dx \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta(x^\alpha\varphi_k)|(1+|x|)^{n+1} \int \frac{dy}{(1+|y|)^{n+1}}, \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| = 0,$$

cioè $F[\varphi_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il lemma è dimostrato. $\square$

La trasformazione inversa di Fourier F^{-1} possiede proprietà analoghe.

Trasformazione di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Assumiamo l'uguaglianza (1.1) come definizione di trasformata di Fourier $F[f]$ di qualunque distribuzione $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \qquad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.12}$$

Verifichiamo che il secondo membro di quest'uguaglianza definisce un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cioè che $F[f] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Infatti, visto che $F[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \mapsto (f, F[\varphi])$ è un funzionale lineare su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Per il Lemma 3.1, $F[\varphi_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e quindi, in virtù del fatto che f appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha $(f, F[\varphi_k]) \to 0$ per $k \to \infty$, di modo che il funzionale $\varphi \mapsto (f, F[\varphi])$ è continuo su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dunque, l'operazione di trasformazione di Fourier F porta lo spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Inoltre, F è un'operazione lineare e continua da $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La linearità di F è evidente. Dimostriamo la sua continuità. Supponiamo che

$f_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. In questo caso, in base alla (1.12), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(F[f_k], \varphi) = (f_k, F[\varphi]) \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Ciò significa che $F[f_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, cioè l'operazione F è continua da $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Introduciamo in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ancora un'operazione di trasformazione di Fourier che denotiamo con F^{-1}:

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)], \qquad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \tag{1.13}$$

Dimostriamo che l'operazione F^{-1} è un'operazione inversa di F, cioè

$$F^{-1}[F[f]] = f, \qquad F[F^{-1}[f]] = f, \qquad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \tag{1.14}$$

Infatti, dalle (1.10)-(1.13) per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ottengono le uguaglianze

$$\begin{aligned}
(F^{-1}[F[f]], \varphi) &= \frac{1}{(2\pi)^n}(F[F[f](-\xi)], \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n}(F[f](-\xi), F[\varphi]) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}(F[f], F[\varphi](-\xi)) = (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) \\
&= (f, \varphi) = (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (F[F^{-1}[f]], \varphi),
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le corrispondenti proprietà in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ al sesto ed al settimo passaggio.[3] Ora seguono le formule (1.14).

Dalle formule (1.14) deriva che ogni distribuzione f appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è la trasformata di Fourier della distribuzione $g = F^{-1}[f]$ appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, con $f = F[g]$, e se $F[f] = 0$, si ha anche $f = 0$. Abbiamo, quindi, dimostrato che le trasformazioni di Fourier F e F^{-1} trasformano $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in modo biunivoco e continuo.

Supponiamo che $f = f(x,y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ dove $x \in \mathbb{R}^n$ ed $y \in \mathbb{R}^m$. Introduciamo la trasformata di Fourier $F_x[f]$ rispetto alle variabili $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, ponendo per qualunque $\varphi = \varphi(x,y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$

$$(F_x[f], \varphi) = (f, F_\xi[\varphi]). \tag{1.15}$$

[3] Si noti che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$.

Come nel Lemma 3.1, si stabilisce che

$$F_\xi[\varphi](x,y) = \int \varphi(\xi,y)e^{i(\xi,x)}\,d\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$$

e l'operazione $F_\xi[\varphi]$ è continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, di modo che la formula (1.15) definisce realmente una distribuzione $F_x[f](\xi,y)$ appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Esempio. Dimostriamo che

$$F[\delta(x-x_0)] = e^{-i(\xi,x_0)}. \tag{1.16}$$

Infatti,

$$\begin{aligned}(F[\delta(x-x_0)],\varphi) &= (\delta(x-x_0),F[\varphi]) = F[\varphi](x_0)\\ &= \int \varphi(\xi)e^{-i(\xi,x_0)}\,d\xi = (e^{-i(\xi,x_0)},\varphi), \qquad \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Ponendo nella (1.16) $x_0=0$, si ottiene

$$F[\delta] = 1, \tag{1.17}$$

da cui

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n}F[1],$$

di modo che

$$F[1] = (2\pi)^n\delta(\xi). \tag{1.18}$$

Proprietà della trasformazione di Fourier

(a) **Derivazione della trasformata di Fourier**. Se $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$D^\alpha F[f] = F[(-ix)^\alpha f]. \tag{1.19}$$

Infatti, utilizzando la (1.7), si ottiene per tutte le $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}(D^\alpha F[f],\varphi) &= (-1)^{|\alpha|}(F[f],D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f,F[D^\alpha\varphi])\\ &= (-1)^{|\alpha|}(f,(ix)^\alpha F[\varphi]) = ((-ix)^\alpha f,F[\varphi]) = (F[(ix)^\alpha f],\varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (1.19). In particolare, ponendo nella (1.19) $f=1$ ed utilizzando la formula (1.18), abbiamo

$$F[x^\alpha](\xi) = i^{|\alpha|}D^\alpha F[1](\xi) = (2\pi)^n\, i^{|\alpha|}D^\alpha\delta(\xi). \tag{1.20}$$

(b) **Trasformata di Fourier della derivata**. Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$F[D^\beta f] = (i\xi)^\beta F[f]. \tag{1.21}$$

Infatti, utilizzando la formula (1.6), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}&(F[D^\beta f], \varphi) = (D^\beta f, F[\varphi]) = (-1)^{|\beta|}(f, D^\beta F[\varphi])\\ &= (-1)^{|\beta|}(f, F[(-i\xi)^\beta \varphi]) = (-1)^{|\beta|}(F[f], (-i\xi)^\beta \varphi) = ((i\xi)^\beta F[f], \varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (1.21).

(c) **Trasformata di Fourier di una traslazione**. Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$F[f(x - x_0)] = e^{-i(x_0,x)} F[f]. \tag{1.22}$$

Infatti, abbiamo per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}&(F[f(x - x_0)], \varphi) = (f(x - x_0), F[\varphi]) = (f, F[\varphi](x + x_0))\\ &= (f, F[\varphi e^{-i(x_0,\xi)}]) = (F[f], e^{-i(x_0,\xi)}\varphi) = (e^{-i(x_0,\xi)} F[f], \varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (1.22).

(d) **Traslazione della trasformata di Fourier**. Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$F[f](\xi + \xi_0) = F[e^{i(\xi_0,x)} f](\xi). \tag{1.23}$$

Infatti, utilizzando la formula (1.22), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}&F[f](\xi + \xi_0), \varphi) = (F[f], \varphi(\xi - \xi_0)) = (f, F[\varphi(\xi - \xi_0)])\\ &= (f, e^{i(\xi_0,x)} F[\varphi]) = (e^{i(\xi_0,x)} f, F[\varphi]) = (F[e^{i(\xi_0,x)} f], \varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (1.23).

(e) **Trasformata di Fourier di rescaling**. Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, per tutti i valori reali di $c \neq 0$ si ha

$$F[f(cx)](\xi) = \frac{1}{|c|^n} F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \tag{1.24}$$

poichè per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ abbiamo

$$\begin{aligned}&(F[f(cx)], \varphi) = (f(cx), F[\varphi]) = \frac{1}{|c|^n}\left(f, F[\varphi]\left(\frac{x}{c}\right)\right)\\ &= \frac{1}{|c|^n}\left(f, \int \varphi(\xi) e^{-i(\frac{x}{c},\xi)}\, d\xi\right) = (f, \int \varphi(c\xi') e^{-i(x,\xi')}\, d\xi') = (f, F[\varphi(c\xi)])\\ &= (F[f], \varphi(c\xi)) = \frac{1}{|c|^n}\left(F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \varphi\right).\end{aligned}$$

1.5 Distribuzione in un Dominio

Sis Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathcal{D}(\Omega)$ sarà lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ di classe C^∞ che si annullano fuori di un sottoinsieme chiuso e limitato di Ω. Una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ è detta di convergere a φ se esiste un sottoinsieme chiuso e limitato K di Ω fuori del quale si annullano tutte le funzioni φ_m e tale che $(D^\alpha\varphi_m)(x)$ tende a $(D^\alpha\varphi)(x)$ uniformemente in $x \in K$. Osserviamo che per $\Omega = \mathbb{R}^n$ la definizione di convegenza coincide con quella precedente. Evidentemente ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ può essere estesa ad una funzione test in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definendola uguale a zero fuori del dominio Ω. Di conseguenza, la distribuzioni appartenenti a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si possono applicare all (estensioni delle) funzioni test in $\mathcal{D}(\Omega)$. Ora definiamo $\mathcal{D}'(\Omega)$ come lo spazio vettoriale di tutti i funzionali lineari f in $\mathcal{D}(\Omega)$ che sono continui nel seguente senso: Se $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ converge a φ in $\mathcal{D}(\Omega)$, allora $(f, \varphi_m) \to (f, \varphi)$. In particolare, se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ si annulla fuori di Ω quasi ovunque, allora $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Più precisamente,

$$(f, \varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Le derivazioni deboli si definiscono ora in $\mathcal{D}'(\Omega)$ in modo naturale:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha\varphi),\ f \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

qualunque sia il multiindice α.