Capitolo 1

Spazi di Banach e di Hilbert

In questo capitolo si introducono gli spazi di Banach e di Hilbert, gli operatori lineari e loro spettro.

1.1 Spazi di Banach

Consideriamo noto il concetto di spazio vettoriale X rispetto ad un campo di scalari $\mathbb{F}$ che supponiamo uguale a $\mathbb{R}$ (numeri reali) oppure a $\mathbb{C}$ (numeri complessi). Quindi in X sono state definite l'addizione $X \times X \mapsto X$ e la moltiplicazione scalare $\mathbb{F} \times X \mapsto X$ con le solite proprietà aritmetiche.

Uno *spazio normato* X è uno spazio vettoriale su cui è definita una norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

a. $\|\varphi\| \geq 0$ per ogni $\varphi \in X$; (positività)

b. $\|\varphi\| = 0$ se e solo se $\varphi = 0$; (definitezza)

c. $\|\alpha\varphi\| = |\alpha| \, \|\varphi\|$ per $\alpha \in \mathbb{F}$ e $\varphi \in X$; (omogeneità)

d. $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$. (disuguaglianza triangolare)

Dalle (c)-(d) segue subito che

e. $|\|\varphi\| - \|\psi\|| \leq \|\varphi - \psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$.

Per *distanza* tra φ e ψ si intende la $\|\varphi - \psi\|$.

Uns successione $\{\varphi_n\|_{n=1}^{\infty}$ di elementi di X è detta *convergente* al vettore $\varphi \in X$ se $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$, ossia se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$ per ogni $n > n(\varepsilon)$.

Una successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ di elementi di uno spazio normato X si dice *successione di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$ per $n, m > n(\varepsilon)$, ossia se $\lim_{n,m\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0$. La norma in X si dice *completa* se ogni successione di Cauchy in X è convergente in X. Uno spazio normato con norma completa si dice *spazio di Banach*.

Siano X e Y due spazi normati, $U \subset X$ e $f : U \to Y$. Allora f si dice *continua* in $\psi \in U$ se $\{f(\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(\varphi)$ in Y per ogni successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ in U che converge a φ. La funzione f si dice continua se è continua in ogni punto $\varphi \in U$.

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Banach, trascurando la dimostrazione della completezza della norma.

1. Per ogni sottoinsieme chiuso e limitato Ω di $\mathbb{R}^n$,[1] sia $C(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni scalari (reali o complesse) continue in Ω. Allora la funzione $\|\cdot\|_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$,
$$\|f\|_\infty = \max_{z\in\Omega} |f(x)|,$$
introduce una norma completa in $C(\Omega)$.

2. Per ogni sottoinsieme limitato Ω di $\mathbb{R}^n$,[2] sia $C(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni scalari (reali o complesse) continue **e limitate** in Ω. Allora la funzione $\|\cdot\|_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$,
$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\Omega} |f(x)|,$$
introduce una norma completa in $C(\Omega)$.

3. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$. Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω, dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $\|\cdot\|_2 : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$,
$$\|f\|_2 = \left(\int_\Omega |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$
è una norma completa in $L^2(\Omega)$.

[1] In generale, per ogni spazio compatto di Hausdorff Ω

[2] In generale, per ogni spazio di Tychonoff Ω

4. Sia $1 \leq p < \infty$. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$. Con $L^p(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni sommabili alla potenza p-esima (nel senso di Lebesgue) in Ω, dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $\| \cdot \|_p : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

   è una norma completa in $L^p(\Omega)$.

5. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le succesioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $\| \cdot \|_2 : \ell^2 \to \mathbb{R}$,

$$\|\{x_n\}_{n=1}^\infty\|_2 = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \right)^{1/2},$$

   è una norma completa in ℓ^2.

6. Sia $1 \leq p < \infty$. Sia ℓ^p lo spazio vettoriale di tutte le succesioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ è convergente. Allora la funzione $\| \cdot \|_p : \ell^p \to \mathbb{R}$,

$$\|\{x_n\}_{n=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{1/p},$$

   è una norma completa in ℓ^p.

Per un elemento φ di uno spazio normato X e $r > 0$, l'insieme

$$B(\varphi; r) = \{\psi \in X : \|\varphi - \psi\| < r\}$$

è definito la *sfera aperta* di raggio r e centro φ. Un sottoinsieme U si dice *aperto* se per ogni $\varphi \in X$ esiste $r > 0$ (che dipende da φ) tale che $B(\varphi; r) \subset U$. Dato il sottoinsieme U di X, la *parte interna* U^0 di U è l'insieme aperto più grande di X contenuto in U.

Un sottoinsieme U di X si dice *chiuso* se esso contiene tutti i limiti di tutte le successioni con termini in U e limiti in X. Dato il sottoinsieme U di X, la sua *chiusura* $\overline{U}$ è il sottoinsieme chiuso più piccolo di X che contiene U.

Dato il sottoinsieme U di X, la *frontiera* ∂U di U è l'insieme dei punti di X che possono essere il limite sia di una succesione in U sia di una successione in $X \setminus U$. Si dimostra facilmente che

$$\partial U = \overline{U} \cap \overline{(X \setminus U)}.$$

Un sottoinsieme U di X si dice *limitato* se il diametro

$$\mathrm{diam}(U) = \sup\{\|\varphi - \psi\| : \varphi, \psi \in X\}$$

è finito. In tal caso esiste $r > 0$ (con $r \geq \frac{1}{2}\mathrm{diam}(U)$) tale che $U \subset B(\varphi; r)$ per un opportuno vettore $\varphi \in X$.

Un sottoinsieme D di X si dice *denso* in X se ogni vettore $\varphi \in X$ è il limite di una successione con termini in D. Uno spazio di Banach si dice *separabile* se ha un sottoinsieme denso finito o infinito numerabile.

1.2 Spazi di Hilbert

Sia X uno spazio vettoriale reale o complesso (cioè, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Allora una funzione $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{F}$ soddisfacente le seguenti proprietà:

a. $(\varphi, \varphi) \geq 0$, (positività)

b. $(\varphi, \varphi) = 0$ se e solo se $\varphi = 0$, (definitezza)

c. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$ per ogni $\varphi, \psi \in X$, (simmetria)

d. $(\alpha\varphi + \beta\psi, \chi) = \alpha(\varphi, \chi) + \beta(\psi, \chi)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $\varphi, \psi, \chi \in X$,(linearità)

è definita *prodotto scalare* (oppure *prodotto interna*, oppure, nel caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, *prodotto sesquilineare*). Nella (c) il soprasegno indica il coniugato complesso se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Dalle (c)-(d) segue subito che

e. $(\chi, \alpha\varphi + \beta\psi) = \overline{\alpha}(\chi, \varphi) + \overline{\beta}(\chi, \psi)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $\varphi, \psi, \chi \in X$.

Ogni prodotto scalare induce la cosiddetta *norma indotta*

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}.$$

Inoltre vale la *disuguaglianza di Schwartz*[3]

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\| \quad \text{per } \varphi, \psi \in X,$$

che è un'uguaglianza se e solo se φ e ψ sono proporzionali. La disuguaglianza di Schwartz implica la disuguaglianza triangolare[4]

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|, \qquad \varphi, \psi \in X.$$

Uno spazio vettoriale con prodotto scalare si chiama *spazio pre-Hilbert*. Uno spazio pre-Hilbert con norma indotta completa si dice *spazio di Hilbert*.

Uno spazio di Hilbert soddisfa all'*identità del parallelogramma*

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2 \left(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 \right).$$

Vice versa, se la norma di uno spazio di Banach soddisfa all'identità del parallologramma, essa è la norma indotta di uno spazio di Hilbert.

Il prodotto scalare può essere espresso nella norma tramite la cosiddetta *formula di polarizzazione*:

$$(\varphi, \psi) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2), & \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ \frac{1}{4}(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2 + i\|\varphi + i\psi\|^2 - i\|\varphi - i\psi\|^2, & \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Hilbert.

1. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$. Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω, dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $(\cdot, \cdot) : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{C}$,

$$(f, g) = \left(\int_\Omega f(x) \overline{g(x)} \, dx \right)^{1/2},$$

è un prodotto scalare in $L^2(\Omega)$ che induce la solita norma.

---

[3]Dim: Sia ξ un numero complesso di modulo 1 tale che $\xi(\varphi, \psi) = |(\varphi, \psi)|$ e sia $\chi = \xi\psi$. In tal caso $\|\chi\| = \|\psi\|$, mentre per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $0 \leq \|\varphi + t\chi\|^2 = \|\varphi\|^2 + 2t(\varphi, \chi) + t^2\|\chi\|^2$. Quindi il discriminante di questo polinomio reale quadrato è non positivo. Dunque $4(\varphi, \chi)|^2 - 4\|\varphi\|^2 \, \|\chi\|^2 \leq 0$ e quindi $|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\|$.

[4]Dim: $\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\mathrm{Re}(\varphi, \psi) \leq \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\|\varphi\| \, \|\psi\| = (\|\varphi\| + \|\psi\|)^2$.

2. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le succesioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $(\cdot,\cdot) : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$,

$$(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) = \left(\sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n}\right)^{1/2},$$

è un prodotto scalare in ℓ^2 che induce la solita norma.

1.3 Basi Ortonormali in Spazi di Hilbert

Consideriamo prima uno spazio vettoriale di dimensione N con prodotto scalare. Tale spazio ha una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ di vettori di lunghezza 1 ortogonali tra loro. Partendo da una base (i.e., sistema linearmente indipendente massimale) $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ qualsiasi, si può costruire una base ortonormale utilizzando il *processo di Gram-Schmidt*:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} \\ \varphi_2 = \dfrac{\psi_2 - (\psi_2,\varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2,\varphi_1)\varphi_1\|} \\ \varphi_3 = \dfrac{\psi_3 - (\psi_3,\varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3,\varphi_2)\varphi_2}{\|\psi_3 - (\psi_3,\varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3,\varphi_2)\varphi_2\|} \\ \vdots \\ \varphi_N = \dfrac{\psi_N - (\psi_N,\varphi_1)\varphi_1 - \ldots - (\psi_N,\varphi_{N-1})\varphi_{N-1}}{\|\psi_N - (\psi_N,\varphi_1)\varphi_1 - \ldots - (\psi_N,\varphi_{N-1})\varphi_{N-1}\|}. \end{cases}$$

È facile controllare induttivamente che φ_j è ortogonale ai vettori $\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}$ e ha norma 1 ($j = 1, 2, \ldots, N$).

Per trovare la base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ dalla base $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ in modo non iterativo, si consideri la matrice di Gram

$$G = \{(\psi_n, \psi_m)\}_{n,m=1}^N.$$

Sostituendo

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n c_{nk}\psi_k, \quad \varphi_m = \sum_{l=1}^m c_{ml}\psi_l,$$

e richiedendo che $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$ (essendo δ_{nm} la delta di Kronecker), otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} c_{nk}\overline{c_{ml}}(\psi_k, \psi_l).$$

In altre parole, si cerchi una matrice sottotriangolare $C = (c_{nm})_{n,m=1}^{N}$ tale che

$$CGC^* = \mathbb{I},$$

dove $\mathbb{I}$ è la matrice identità e C^* è la trasposta coniugata di C. Quindi bisogna trovare una matrice sottotriangolare L (con trasposta coniugata L^*) tale che vale la cosiddetta fattorizzazione di Cholesky $G = LL^*$ e poi invertire la L: $C = L^{-1}$. Per ottenere un risultato unico si richiede che L_{11} sia positivo.

Appena trovata una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$, si ottengono subito le cosiddette *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |(\varphi, \varphi_n)|^2,$$
$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{N} (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Consideriamo ora uno spazio di Hilbert **separabile** X a dimensione infinita. Estraendo da un sottoinsieme denso e infinito numerabile D un sistema di vettori linearmente indipendente massimale e applicando il processo di Gram-Schmidt senza fermarsi ad un indice superiore N, si ottiene una base ortonormale **e infinita numerabile** $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. D'altra parte, l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori di una base ortonormale infinita numerabile di X è denso in X. Concludiamo dunque che uno spazio di Hilbert separabile a dimensione finita viene caratterizzato dall'esistenza di una base ortonormale infinita numerabile.

Data una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X, risultano le *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2,$$
$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Inoltre, vale lo sviluppo

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n$$

nel senso che

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \varphi - \sum_{n=1}^{N} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n \right\| = 0.$$

Introducendo la successione crescente di sottospazi

$$E_N = \mathrm{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$$

di dimensione N, si può leggere quest'ultima relazione limite nella seguente maniera: La distanza (ortogonale) tra φ e il sottospazio E_N tende a zero se $N \to \infty$.[5] Quindi

$$\varphi \mapsto \sum_{n=1}^{N} (\varphi, \lambda_n)\lambda_n$$

definisce la *proiezione ortogonale* di φ in E_N.

Dato lo spazio di Hilbert separabile X con base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, si definisce la trasformazione lineare $U : X \to \ell^2$ da

$$U\varphi = \{(\varphi, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty},$$

ossia $U\varphi$ è la successione dei coefficienti (φ, φ_n) vista come vettore in ℓ^2. Allora, applicando la definizione della norma in ℓ^2,

$$\|U\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 = \|\varphi\|^2,$$

secondo l'identità di Parseval. Si verifica facilmente che U definisce una corrispondenza biunivoca tra X e ℓ^2. Costruendo la U per $X = \ell^2$ e la sua base ortonormale canonica, si vede subito che U coincide con la trasformazione identità in ℓ^2. Concludiamo che, tranne una trasformazione unitaria della base ortonormale, esiste un singolo spazio di Hilbert separabile.

[5] Sia $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n\varphi_n$ un vettore arbitrario in E_N e $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \left\| \varphi - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n\varphi_n \right\|^2$ la distanza tra φ e E_N al quadrato. Si può dimostrare che il minimo viene assunto per $\lambda_n = (\varphi, \varphi_n)$ $(n = 1, \ldots, N)$.

1.4 Applicazioni

1. In $X = L^2(-\pi,\pi)$ le funzioni

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f \in L^2(-\pi,\pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx,$$

si vede subito che $c_n = (2\pi)^{1/2}(\varphi,\varphi_n)$ per $n \in \mathbb{Z}$. Secondo l'identità di Parseval segue

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

ossia

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$$

nel senso che

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n\, e^{inx}\right|^2 dx = 0.$$

2. In $X = L^2(-\pi,\pi)$ le funzioni

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_n^c(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_n^s(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \qquad n = 1,2,3,\ldots,$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f \in L^2(-\pi,\pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, & n = 0,1,2,\ldots, \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, & n = 1,2,3,\ldots, \end{cases}$$

si applichi l'identità di Parseval per trovare l'uguaglianza

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right).$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$$

nel senso che

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)\right|^2 dx = 0.$$

3. Sia $X = L^2(-1,1)$. Applicando il processo di Gram-Schmidt al sistema $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ dove $\psi_n(x) = x^n$, si ottengono le versioni normalizzate dei *polinomi di Legendre*. Infatti, moltiplicando questi polinomi da costanti positive tali che hanno il valore 1 in $x = 1$, risultano i soliti *polinomi di Legendre*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\,(n!)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n$$

soddisfacenti

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{nm}.$$

Data una funzione $f \in L^2(-1,1)$ e definendo i coefficienti

$$\beta_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)\,dx, \qquad l = 0,1,2,\ldots,$$

otteniamo l'identità di Parseval

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|^2\,dx = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{2l+1}\,|\beta_l|^2$$

e lo sviluppo

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\beta_l P_l(x)$$

Tabella 1.1: I polinomi ortogonali classici

Nome dei polinomi	I	$w(x)$
Legendre	$(-1,1)$	1
Chebyshev di 1^a specie	$(-1,1)$	$(1-x^2)^{-1/2}$
Chebyshev di 2^a specie	$(-1,1)$	$(1-x^2)^{1/2}$
Legendre associati	$(-1,1)$	$(1-x^2)^m$ per $m=1,2,3,\ldots$
Jacobi	$(-1,1)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ con $\alpha,\beta>-1$
Gegenbauer o ultrasferici	$(-1,1)$	$(1-x^2)^\lambda$ con $\lambda>-1$
Laguerre	$(0,\infty)$	$x^\alpha e^{-x}$ per $\alpha>-1$
Hermite	$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}

nel senso che

$$\lim_{L\to\infty}\int_{-1}^{1}\left|f(x)-\sum_{l=0}^{L}\beta_l P_l(x)\right|^2 dx=0.$$

4. Sia I un intervallo della retta reale e w una funzione positiva quasi ovunque su I tale che $\int_I |x|^{2n}w(x)\,dx<\infty$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Applicando il processo di Gram-Schmidt al sistema $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ dove $\psi_n(x)=x^n$, si ottengono i polinomi ortogonali $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ rispetto al peso w, dove il grado di pn è uguale ad n e i coefficienti principali sono tutti positivi. Data una funzione $f\in L^2(I;w\,dx)$ e definendo i coeffienti

$$c_n=\int_I f(x)p_n(x)w(x)\,dx,\qquad n=0,1,2,\ldots,$$

otteniamo l'identità di Parseval

$$\int_I |f(x)|^2 w(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2$$

e lo sviluppo

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n p_n(x)$$

convergente nel senso che

$$\lim_{N\to\infty}\int_I\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}c_n p_n(x)\right|^2 w(x)\,dx=0.$$

1.5 Operatori Lineari

Siano X e Y due spazi di Banach. Un'applicazione $T : X \to Y$ si dice operatore lineare se

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2), \qquad x_1, x_2 \in X, \ \lambda_1, \lambda_2 \in F,$$

dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$. Molto spesso scriviamo Tx invece di $T(x)$. Gli esempi principali degli operatori lineari sono le matrici $n \times m$ (come rappresentazioni degli operatori lineari da F^m in F^n) e gli operatori differenziali lineari. L'immagine di tale T è l'insieme $\Im(T) = \{Tx : x \in X\}$; quest'insieme è un sottospazio lineare di Y. Il kernel di T è il sottospazio lineare di X definito da $\ker T = \{x \in X : Tx = 0\}$.

Un operatore lineare $T : X \to Y$ si dice *invertibile* se è una corrispondenza biunivoca tra X e Y.

Proposizione 1 *Un operatore lineare $T : X \to Y$ è invertibile se e solo se $\Im T = Y$ e $\ker T = \{0\}$.*

Dimostrazione. Se T è invertibile, si ha ovviamente $\Im T = Y$ e $\ker T = \{0\}$. D'altra parte, se $\Im T = Y$ e $\ker T = \{0\}$, per ogni $y \in Y$ l'equazione $Tx = y$ ha almeno una soluzione $x \in X$ (poichè $\Im T = Y$). Se ci fossero $x_1, x_2 \in X$ tali che $Tx_1 = Tx_2 = y$, allora $T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0$ e quindi $x_1 - x_2 = 0$ (poichè $\ker T = \{0\}$) e $x_1 = x_2$. Quindi la soluzione $x \in X$ dell'equazione $Tx = y$ è unica per ogni $y \in Y$. $\square$

Siano X e Y spazi di Banach. Un operatore lineare $T : X \to Y$ si dice *limitato* se $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < +\infty$. In tal caso il numero

$$\|T\| = \sup_{x \in X, \ \|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

si dice *norma* di T. Se $X = F^n$ (dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$) ha dimensione finita, ogni operatore lineare $T : X \to Y$ è limitato.

a. Sia $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonica di F^n. Allora ogni operatore limitato $T : F^n \to Y$ può essere rappresentato come

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T e_i.$$

Se si applica ad una matrice, la norma si chiama *norma spettrale*.[6] Utilizzando questa rappresentazione, si dimostri la limitatezza di T.

b. Siano X, Y, Z tre spazi di Banach e siano $T : X \to Y$ e $S : Y \to Z$ due operatori lineari limitati. Allora $ST : X \to Z$ è un operatore lineare limitato e $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. Si dimostri questo fatto.

Proposizione 2 *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a. T è un operatore limitato.

b. $T : X \to Y$ è una funzione uniformemente continua.

c. $T : X \to Y$ è una funzione continua.

d. $T : X \to Y$ è continua in 0.

Dimostrazione. [(a)$\Longrightarrow$(b)] Per $x_1, x_2 \in X$ si ha grazie alla limitatezza di T: $\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \|T\|\|x_1 - x_2\|$. Quindi, se $\|x_1 - x_2\| < (\varepsilon/\|T\|)$, allora $\|Tx_1 - Tx_2\| < \varepsilon$. Allora T è uniformemente continuo.

[(b)$\Longrightarrow$(c)$\Longrightarrow$(d)] Ovvio.

[(d)$\Longrightarrow$(a)] Sia T continuo in 0. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\|x\| < \delta$ implica $\|Tx\| < 1$. Quindi per qualsiasi $x \in X$ con $\|x\| = 1$ si ha $\|(\delta/2)x\| < \delta$ e dunque $(\delta/2)\|Tx\| = \|T(\delta/2)x\| < 1$. Allora $\|x\| = 1$ implica $\|Tx\| < (2/\delta)$. Di conseguenza T è limitato con norma $\leq (2/\delta)$. □

Consideriamo adesso lo spazio normato $\mathcal{L}(X, Y)$ di tutti gli operatori lineari e limitati da X in Y, dove X e Y sono spazi di Banach. Scriviamo $\mathcal{L}(X)$ se $X = Y$. Se $X = F^m$ e $Y = F^n$ (per $F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$), $\mathcal{L}(X, Y)$ coincide con lo spazio delle matrici $n \times m$.

Proposizione 3 *Siano X, Y spazi di Banach. Allora $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X, Y)$. In altre parole, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ per $n, m > \nu$. Per $x \in X$ abbiamo la successione di Cauchy $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ in Y. Per $x = 0$ questo è chiaro. Per $x \neq 0$ si ha: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon\|x\|$ se $n, m > \nu$, mentre $\varepsilon\|x\|$ è una costante positiva

[6] La norma spettrale di una matrice è uguale al suo numero singolare più grande.

arbitraria. Siccome Y è uno spazio completo, esiste, per ogni $x \in X$, un vettore $Tx \in Y$ tale che $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$. Si dimostra facilmente che T è un operatore lineare. Inoltre, per quel $\nu = \nu(\varepsilon)$ si ha $\|T_n x - Tx\| \le \varepsilon \|x\|$ se $n > \nu$ (calcolando il limite se $m \to \infty$). Quindi per un opportuno $n_0 > \nu$ si ha

$$\|Tx\| \le \|T_{n_0}x - Tx\| + \|T_{n_0}\|\|x\| \le (\varepsilon + \|T_{n_0}\|)\,\|x\|, \qquad x \in X,$$

implicando la limitatezza di T. Inoltre, siccome per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|T_n x - Tx\| \le \varepsilon \|x\|$ se $n > \nu$, si ha $\|T_n - T\| \to 0$ se $n \to \infty$. In altre parole, $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ è convergente in $\mathcal{L}(X,Y)$. □

Discutiamo due esempi.

a. Sullo spazio ℓ^1 definiamo l'operatore A come

$$(A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^\infty a_{i,j} x_j, \qquad \mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^\infty,$$

dove $\{a_{i,j})_{i,j=1}^\infty$ è una matrice infinita. Allora A è limitato se

$$\|A\| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^\infty |a_{i,j}| < +\infty.$$

Infatti, sotto questa condizione abbiamo

$$\|A\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^\infty |(A\mathbf{x})_i| \le \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |a_{i,j}||x_j| \le \|A\| \sum_{j=1}^\infty |x_j| = \|A\|\|\mathbf{x}\|_1.$$

Abbiamo infatti trovato il valore esatto della norma di A, ma questo non verrà dimostrato.

b. Sullo spazio $L^2(G)$ e per qualsiasi funzione misurabile limitata h su G definiamo l'operatore M da

$$(Mf)(x) = h(x)f(x), \qquad x \in G.$$

Allora hf è misurabile se f è misurabile. Inoltre,

$$\|hf\|^2 = \int_G |h(x)f(x)|^2\,dx \le \|h\|_\infty^2 \int_G |f(x)|^2\,dx = \|h\|_\infty^2 \|f\|_2^2,$$

dove $\|h\|_\infty = \sup_{x\in G} |h(x)|$. Quindi M è limitato su $L^2(G)$. Si dimostra nella stessa maniera che M è limitato su $L^1(G)$. In entrambi i casi $\|h\|_\infty$ è un maggiorante della norma di M. Infatti $\|h\|_\infty$ è il valore esatto della norma, ma questo non verrà dimostrato.

Finora tutte le dimostrazioni sono state abbastanza elementari. Il prossimo teorema non è facile da dimostrare e richiede una certa proprietà topologica (quella di Baire) degli spazi metrici completi.

Teorema 4 *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ invertibile. Allora l'operatore inverso $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.*

Il prossimo teorema fornisce un algoritmo per dimostrare l'invertibilità di un operatore limitato e per calcolare (almeno in principio) la sua inversa. L'operatore inverso verrà costruito come la somma della cosiddetta *serie di Neumann* che generalizza la serie geometrica. Abbiamo bisogno dell'operatore d'identità I_X (oppure I se non c'è pericolo di confusione) su uno spazio di Banach X: Si definisca $I_X x = x$ per ogni $x \in X$.

Teorema 5 *Sia X uno spazio di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora T è invertibile se $\|I - T\| < 1$. In tal caso*

$$T^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (I-T)^j,$$

dove $(I-T)^0 = I_X$ e la serie è convergente nella norma di $\mathcal{L}(X)$.

Dimostrazione. Consideriamo le somme parziali

$$S_n = I + (I-T) + (I-T)^2 + \cdots + (I-T)^n = \sum_{j=0}^{n} (I-T)^j.$$

Si vede subito (o quasi subito) che

$$TS_n = S_nT = S_n - (I-T)S_n = S_n - S_{n+1} + I. \tag{1.1}$$

Adesso facciamo la stima [Vedi l'esercizio 1.9]

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{n+p} (I-T)^j \right\| \le \sum_{j=n+1}^{n+p} \|I-T\|^j \le \frac{\|I-T\|^{n+1}}{1 - \|I-T\|},$$

ciò implica che $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X)$. Dalla Proposizione 3 segue l'esistenza di $S \in \mathcal{L}(X)$ tale che $\|S_n - S\| \to 0$ se $n \to \infty$. Calcolando il limite in (1.1) se $n \to \infty$, otteniamo

$$TS = ST = S - (I - T)S = S - S + I.$$

Di conseguenza $TS = ST = I$, cioè $S = T^{-1}$. □

Dalla serie di Neumann si ottiene facilmente

$$\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - T\|}$$

se $\|I - T\| < 1$.

Corollario 6 *Siano X, Y spazi di Banach, $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$ e T invertibile. Se*

$$\|T - S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|},$$

allora S è invertibile. In altre parole, l'insieme degli operatori invertibili in $\mathcal{L}(X, Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X, Y)$.

Dimostrazione. Ovviamente, $T^{-1}S \in \mathcal{L}(X)$. Inoltre,

$$\left\|I_X - T^{-1}S\right\| = \left\|T^{-1}[T - S]\right\| \leq \|T^{-1}\|\|T - S\| < \|T^{-1}\|\|T^{-1}\|^{-1} = 1$$

implica (secondo il teorema precedente) che $T^{-1}S$ è invertibile. In tal caso S è invertibile. □

1.6 Spettro di un Operatore Lineare

Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ consideriamo gli operatori lineari $\lambda - T$ (cioè, $\lambda I_X - T$ scritto male). Studiamo l'invertibilità di $\lambda - T$ al variare di λ.

Il numero $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice *autovalore* di T se esiste $0 \neq x \in X$ tale che $(\lambda - T)x = 0$ (cioè, tale che $Tx = \lambda x$). Il vettore x si chiama un corrispondente *autovettore*. In tal caso $\ker(\lambda - T) = \{x \in X : (\lambda - T)x = 0\}$ è l'insieme di tutti gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ, più il vettore zero. La definizione generalizza quella per le matrici quadrate. Infatti, come per le matrici quadrate l'esistenza dell'autovettore $0 \neq x \in X$ tale che $Tx = \lambda x$ implica che $\lambda - T$ non è invertibile. Per le matrici quadrate T basta risolvere l'equazione $\det(\lambda - T) = 0$ per trovare tutti gli autovalori di T. Nel caso di uno spazio X a dimensione infinita la situazione è molto più complicata.

Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Il numero complesso λ appartiene allo *spettro* di T, $\sigma(T)$, se $\lambda - T$ NON è invertibile. Quindi tutti gli autovalori di T appartengono allo spettro di T. Il numero complesso λ appartiene al *risolvente* di T, $\rho(T)$, se $\lambda - T$ è invertibile. Dunque $\rho(T)$ è il complementare di $\sigma(T)$.

Teorema 7 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora lo spettro $\sigma(T)$ di T è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{C}$, mentre il risolvente $\rho(T)$ di T è un aperto non limitato.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \rho(T)$. Se $|\mu - \lambda| < \|(\lambda - T)^{-1}\|^{-1}$, allora $\mu \in \rho(T)$. Questo segue subito dal Corollario 6, poichè $(\mu - \lambda)I_X = (\mu - T) - (\lambda - T)$. Quindi $\rho(T)$ è un aperto in $\mathbb{C}$.

Se $|\lambda| > \|T\|$, $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ implica l'invertibilità dell'operatore $\lambda - T = \lambda(I_X - \lambda^{-1}T)$. Inoltre

$$(\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{\lambda^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{\lambda^{j+1}}, \tag{1.2}$$

dove la serie è convergente nella norma di $\mathcal{L}(X)$. Quindi lo spettro è un insieme chiuso contenuto nella palla di centro zero e raggio $\|T\|$. □

Utilizzando il teorema di Liouville dell'analisi complessa e il teorema di Hahn-Banach dell'analisi funzionale, si può dimostrare che lo spettro di un operatore lineare limitato non è mai vuoto. Quindi il suo risolvente non è mai l'intero piano complesso.

Sia $r(T)$, il *raggio spettrale* di T, il minimo di tutti gli r per cui la serie (1.2) è assolutamente convergente per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > r$. Allora $r(T) \leq \|T\|$ e $\sigma(T)$ è contenuto nel disco di centro 0 e raggio $r(T)$. Infatti quel disco è il disco di centro 0 più piccolo che contiene lo spettro di T. Utilizzando l'espressione per il raggio di convergenza di una serie di potenze, troviamo

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. La formula $\mathbb{C} = \sigma(T) \cup \rho(T)$ rappresenta una partizione del piano complesso in due insiemi disgiunti. Adesso discutiamo un'ulteriore suddivisione di $\mathbb{C}$ in quattro insiemi due a due disgiunti.

a. Se $\lambda - T$ è invertibile, $\lambda \in \rho(T)$. Altrimenti, $\lambda \in \sigma(T)$.

b. Se $\ker(\lambda - T) = \{0\}$, $\Im(\lambda - T)$ è un sottospazio lineare denso in X e $\Im(\lambda - T) \neq X$, si ha $\lambda \in \sigma_c(T)$. Tali punti λ appartengono allo *spettro continuo* di T. In tal caso ogni $x \in X$ si può approssimare da vettori $(\lambda - T)z$ per qualche $z \in X$. Purtroppo esistono $x \in X$ tale che l'equazione $(\lambda - T)z = x$ non ha nessuna soluzione $z \in X$.

c. Se $\ker(\lambda - T) = \{0\}$ e $\Im(\lambda - T)$ è un sottospazio NON denso in X, si ha $\lambda \in \sigma_r(T)$ [lo *spettro residuo* di T].

d. Se $\ker(\lambda - T) \neq \{0\}$, λ è un autovalore di T. L'insieme degli autovalori si scrive come $\sigma_p(T)$ [inglese: point spectrum]. Gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ sono tutti i vettori in $\ker(\lambda - T) \setminus \{0\}$.

   Abbiamo ottenuto la partizione

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \underbrace{\sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_p(T)}_{\sigma(T)}$$

   del piano complesso in quattro insiemi due a due disgiunti.

Per determinare lo spettro continuo più facilmente, dimostriamo il seguente lemma.

Lemma 8 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Sia $\sigma_{ap}(T)$*[7] *l'insieme di tutti i λ tali che $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$ per un'opportuna successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\|x_n\| = 1$. Allora*

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T).$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Se $\lambda \in \sigma_p(T)$ e $0 \neq x \in X$ è un corrispondente autovettore, prendiamo $x_n = (x/\|x\|)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In tal caso $(\lambda - T)x_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ne segue che $\lambda \in \alpha_{ap}(T)$. Quindi $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Se $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $\|(\lambda - T)x\| \geq \varepsilon$ se $\|x\| = 1$. In tal caso si ha

$$\|(\lambda - T)x\| \geq \varepsilon \|x\|, \qquad x \in X.$$

Quindi λ non è un autovalore di T. Se $y \in \Im(\lambda - T)$, esiste un unico vettore $x \in X$ tale che $(\lambda - T)x = y$. In tal caso

$$\|(\lambda - T)^{-1}y\| \leq \varepsilon^{-1}\|y\|, \qquad y \in \Im(\lambda - T). \tag{1.3}$$

[7] L'insieme si dice "approximate point spectrum.

Se $\Im(\lambda - T)$ non è denso in X, ne segue che $\lambda \in \sigma_r(T)$. Se $\Im(\lambda - T)$ è denso in X, la stima (1.3) si estende ad $y \in X$ per continuità, e dunque $\lambda \in \rho(T)$. In altre parole, $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T) \subset \rho(T) \cup \sigma_r(T)$, oppure $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Se $\lambda \in \rho(T)$, esistono $M, m > 0$ tali che $M\|x\| \geq \|(\lambda - T)x\| \geq m\|x\|$ per ogni $x \in X$ (infatti, $M = \|\lambda - T\|$ e $m = \|(\lambda - T)^{-1}\|^{-1}$). Quindi se $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione con $\|x_n\| = 1$, non si ha $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$. Quindi $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$. Ne segue che $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$. $\square$

1.7 Operatori Lineari Autoaggiunti e Unitari

Discutiamo ora gli operatori lineari su uno spazio di Hilbert. Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si definisce l'operator aggiunto T^* dall'uguaglianza

$$(T^*x, y) = (x, Ty), \qquad x, y \in X.$$

Utilizzando l'esercizio 1.3 si dimostra facilmente che

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T^*x\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |< T^*x, y >| \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |< x, Ty >| = \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| = \|T\|.\end{aligned}$$

Quindi $T^* \in \mathcal{L}(X)$ e $\|T^*\| = \|T\|$.

1.8. Si dimostrino le seguenti proprietà: $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ [$(\lambda T)^* = \lambda T^*$ in uno spazio di Hilbert reale], $(T+S)^* = T^* + S^*$, $(TS)^* = S^*T^*$, $(T^*)^* = T$.

Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Introduciamo le seguenti classi di operatori lineari:

a. Gli operatori *autoaggiunti*: $T^* = T$.
b. Gli operatori *unitari*: T invertibile e $T^{-1} = T^*$.
c. Gli operatori *normali*: $TT^* = T^*T$. Osserviamo che gli operatori autoaggiunti e unitari sono ambedue normali.

1.9. Sia X uno spazio di Hilbert *complesso* e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si dimostri che T è autoaggiunto se e solo se (Tx, x) è un numero reale per ogni $x \in X$. Si consiglia sviluppare il prodotto scalare $(T(x + iy), x + iy)$ per $x, y \in X$, utilizzando che $(Tz, z) \in \mathbb{R}$ per $z = x$, $z = y$ e $z = x + iy$. Il risultato non vale in uno spazio di Hilbert reale.

Teorema 9 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore autoaggiunto. Allora*

$$\sigma(T) \subset \{(Tx, x) : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}.$$

Inoltre, $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$. Secondo il Lemma 8 esiste una successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X tale che $\|x_n\| = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) e $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$ se $n \to \infty$. Allora la stima $|((\lambda - T)x_n, x_n)| \leq \|(\lambda - T)x_n\|\|x_n\|$ con $\|x_n\| = 1$ implica che

$$\lambda - (Tx_n, x_n) = ((\lambda - T)x_n, x_n) \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{1.4}$$

Siccome $(Tx_n, x_n) \in \mathbb{R}$ per $n \in \mathbb{N}$, segue $\lambda \in \mathbb{R}$. Dunque $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \mathbb{R}$.

Sia $\lambda \in \sigma_r(T)$. Siccome $\Im(\lambda - T)$ è un sottospazio lineare non denso in X, esiste $0 \neq x \in X$ tale che $((\lambda - T)z, x) = 0$ per ogni $z \in X$. In tal caso segue, per $z = x$,

$$\lambda = \frac{(Tx, x)}{(x, x)} \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\sigma_r(T) \subset \mathbb{R}$. Da questo fatto si trova per ogni $z \in X$

$$0 = ((\lambda - T)z, x) = (z, (\overline{\lambda} - T)x),$$

e quindi $(\overline{\lambda} - T)x = 0$ mentre $x \neq 0$. Risulta che $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T)$. Siccome $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$, si ha $\lambda \in \sigma_p(T)$. Contraddizione. Segue allora che $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Infine, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ e la relazione (1.4) [dove $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$] implicano che lo spettro di T è contenuto nell'intervallo chiuso e limitato più piccolo che contiene l'insieme $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$. Infatti, sia $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\} \subset [m, M]$. Allora

$$m\|x\|^2 \leq (Tx, x) \leq M\|x\|^2, \qquad x \in X.$$

Dunque per ogni $x \in X$

$$\begin{cases} \lambda > M : & (\lambda - M)\|x\|^2 \geq ((\lambda - T)x, x) \geq (\lambda - m)\|x\|^2 \\ \lambda < m : & (m - \lambda)\|x\|^2 \leq ((T - \lambda)x, x) \leq (M - \lambda)\|x\|^2. \end{cases}$$

Di conseguenza, se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$, non esiste nessuna successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tale che $\|x_n\| = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) e $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$. Quindi $\sigma(T) \subset [m, M]$. $\square$

Si può infatti dimostrare che per un operatore lineare autoaggiunto l'insieme $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$ è l'intervallo chiuso e limitato reale più piccolo che contiene lo spettro di T. In particolare, gli estremi di quell'intervallo appartengono a $\sigma(T)$. Purtroppo la dimostrazione non è elementare.

Teorema 10 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore autoaggiunto. Allora il suo raggio spettrale coincide con la sua norma: $r(T) = \|T\|$.*

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ autoaggiunto. Allora

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^2x, x) \leq \|T^2x\|\|x\|, \qquad x \in X,$$

dove è stata applicata la disuguaglianza di Schwartz. Passando all'estremo superiore per gli $x \in X$ con $\|x\| = 1$ si ottiene $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$ e dunque [Vedi l'esercizio 1.9]

$$\|T^2\| = \|T\|^2.$$

Questo implica

$$\|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite se $n \to \infty$ si trova $r(T) = \|T\|$. □

Passiamo ora agli operatori unitari. Utilizzando la formula di polarizzazione si può dimostrare che un'isometria (cioè, un operatore lineare U su uno spazio di Hilbert X tale che $\|U\varphi\| = \|\varphi\|$ per ogni $\varphi \in X$) ha la proprietà

$$(U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi), \qquad \varphi, \psi \in X,$$

e quindi la proprietà

$$(U^*U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi), \qquad \varphi, \psi \in X.$$

Quest'ultimo implica che U è un'isometria in X se e solo se $U^*U = I_X$. Nella stessa maniera si vede che un operatore U ha la proprietà che U^* è un'isometria se e solo se $UU^* = I_X$. Conclusione: U è un operatore unitario se e solo se U e U^* sono ambedue isometrie se e solo se U è un'isometria invertibile. Siccome in tal caso anche U^n e $U^{-n} = (U^{-1})^n$ sono isometrie $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ se U è unitario, risulta

$$\|U^n\| = \|U^{-n}\| = 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Di conseguenza,

$$r(U) = r(U^{-1}) \leq 1,$$

e quindi $\sigma(U) \subset \{z \in C : |z| = 1\}$.