



SISTEMI DINAMICI

Corso di 6 Crediti
Corso di Laurea Triennale in Fisica
A.A. 2009-2010

Cornelis VAN DER MEE

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università di Cagliari

Viale Merello 92, 09123 Cagliari

070-6755605 (studio), 070-6755601 (FAX), 328-0089799 (cell.)

cornelis110553 (Skype)

cornelis@krein.unica.it

<http://krein.unica.it/~cornelis>

Il docente ringrazia il prof. Todor Gramtchev per aver messo alla sua disposizione gli appunti del suo corso di Equazioni Differenziali e Sistemi Dinamici.

Università di Cagliari, a.a. 2009/2010
Ultimo aggiornamento: 27.11.2009

Prefazione

Il concetto di *sistema dinamico* è una formulazione matematica di una regola fissa che descrive la dipendenza dal tempo della posizione di un punto in uno spazio ambiente. Tra gli esempi si trovano i modelli matematici per il movimento di un pendolo, il flusso dell'acqua in un tubo e il numero di individui di una specie biologica (studiata nella dinamica delle popolazioni).

Ad ogni istante un sistema dinamico ha uno *stato* rappresentato da un vettore nello spazio euclideo \mathbb{R}^n che si può rappresentare da un punto in un opportuno spazio delle fasi (inglese: *state space*, *phase space*), infatti in un'opportuna varietà geometrica. Un cambiamento piccolo dello stato del sistema corrisponde ad un cambiamento piccolo delle quantità fisiche o biologiche. L'*evoluzione* del sistema dinamico è una regola che descrive gli stati futuri in termini dello stato attuale. Questa regola è deterministica: ad ogni momento lo stato futuro segue unicamente dallo stato attuale.

Il concetto di sistema dinamico proviene dalla meccanica newtoniana. Lì l'evoluzione del sistema dinamico è data implicitamente da una relazione che rende lo stato del sistema nell'immediato futuro, tramite un'equazione differenziale o un'equazione alle differenze. La determinazione dello stato per l'intero futuro richiede l'iterazione della relazione, cioè la risoluzione o l'integrazione del sistema di equazioni. Appena integrato il sistema, è possibile determinare tutti i suoi stati futuri dal suo stato iniziale, seguendo la cosiddetta traiettoria o orbita.

Prima dell'arrivo dei calcolatori veloci, l'integrazione di un sistema dinamico richiedeva delle tecniche matematiche molto sofisticate e era fattibile soltanto per pochissimi sistemi dinamici abbastanza elementari. La nascita dei metodi numerici ha semplificato drasticamente il calcolo delle orbite di un sistema dinamico.

La maggior parte dei sistemi dinamici è troppo complicata per poter essere spiegata in termini delle traiettorie per le seguenti ragioni:

- Il sistema dinamico si conosce soltanto approssimativamente, mettendo in discussione la validità delle soluzioni numeriche. Per affrontare le difficoltà sono state introdotte diverse nozioni di stabilità, in particolare

la stabilità secondo Liapunov. La stabilità di un sistema dinamico implica l'esistenza di una classe di modelli o di condizioni iniziali per cui sono equivalenti le traiettorie.

- Spesso è rilevante soltanto il tipo di traiettoria. Alcune traiettorie sono periodiche nel tempo, mentre altre sono caotiche o tendono ad un singolo punto. Ciò ha condotto allo studio qualitativo dei sistemi dinamici.
- Spesso importa innanzitutto l'andamento delle traiettorie come funzione di un parametro. Al variare del parametro ci potrebbero essere punti di biforcazione, dove si cambiano drasticamente le proprietà qualitative del sistema dinamico. Per esempio, il sistema potrebbe cambiare da un sistema che espone soltanto le mozioni periodiche, ad uno con comportamento caotico.
- Le traiettorie di un sistema dinamico possono sembrare erratiche. In tal caso bisogna studiare l'andamento medio attraverso un intervallo temporale molto lungo o attraverso molte traiettorie.

Un sistema dinamico è una varietà M , il cosiddetto spazio delle fasi, insieme con una funzione di evoluzione Φ^t che per ogni istante $t \in T$ (dove T è l'insieme dei tempi) trasforma un punto di M in un altro punto di M : $\Phi^t : M \rightarrow M$. Se $T = \mathbb{R}$ (la retta reale), il sistema dinamico si chiama un *flow*. Se $T = \mathbb{R}^+$ (i numeri reali non negativi), si chiama un *semi-flow*. Il sistema si dice *discreto* se $T = \mathbb{Z}$ (gli interi) o $T = \mathbb{Z}^+$ (gli interi non negativi).

I casi prevalenti dei sistemi dinamici lineari discreti sono i seguenti:

$$x_{k+1} = A_k x_k + g_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

dove x_k e g_k sono vettori in \mathbb{R}^n e A_k sono matrici reali $n \times n$. Se A_k non dipende da k , $A_k \equiv A$, il sistema si dice *autonomo*.

Nel continuo abbiamo il sistema lineare

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

dove $x(t)$ e $g(t)$ sono funzioni a valori in \mathbb{R}^n e $A(t)$ è una matrice di funzioni $n \times n$. Tale sistema si dice *autonomo* se $A(t)$ non dipende dal tempo t : $A(t) \equiv A$. Nel caso non lineare si incontra spesso il sistema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Esso si dice *autonomo* se la f dipende soltanto da x .

Indice

Prefazione	i
1 Sistemi lineari	1
1.1 Proprietà fondamentali dei sistemi lineari	1
1.2 Sistemi lineari a coefficienti costanti	4
1.3 Forma canonica di Jordan	6
1.3.1 Sottospazi invarianti	6
1.3.2 Trasformazioni lineari nilpotenti	8
1.3.3 Trasformazioni lineari generiche	12
1.3.4 Forme di Jordan reali	17
1.3.5 Forme di Jordan di matrici di ordine 2 e 3	19
1.4 Esponenziale di una matrice	24
1.5 Potenze intere di una matrice	28
1.6 Studio qualitativo	30
1.7 Teorema di Floquet	32
2 Studio qualitativo dei sistemi non lineari	36
2.1 Studio qualitativo per sistemi sul piano	36
2.2 Punti fissi e loro applicazioni	40
3 Equazioni differenziali di Clairaut e di Lagrange	47
3.1 Equazioni di Clairaut	47
3.2 Equazioni di Lagrange-D'Alembert	53
4 Punti di equilibrio	55
4.1 Sistema autonomo generalizzato	55
4.2 Derivata di Lie e costante del moto	56
4.3 Classificazione dei punti di equilibrio	57
4.4 Oscillatore armonico con attrito	60
4.5 Punti di equilibrio di sistemi omogenei	61

5	Stabilità secondo Liapunov	68
5.1	Stabilità secondo Liapunov	68
5.2	Stabilità per sistemi autonomi sulla retta	69
5.3	Stabilità dell'origine di sistemi lineari a coefficienti costanti	70
5.4	Funzione di Liapunov e linearizzazione	77
5.5	Stabilità e loro applicazioni	82
5.6	Stabilità dei sistemi dinamici discreti	89
6	Biforcazioni e cicli-limite	101
6.1	Teorema di Poincaré-Bendixson	101
6.2	Applicazioni ai sistemi non lineari	110
7	Frattali	123
7.1	Insieme di Cantor e le sue varianti	123
7.2	Caratteristiche dei frattali	127
7.3	Dimensione di Hausdorff	131
A	Inversione locale e funzioni implicite	135
B	3-ciclo implica caos	142
C	Esempi ed esercizi	147
C.1	Esempi	147
C.2	Esercizi	149

Capitolo 1

Sistemi lineari

In questo capitolo studiamo i sistemi lineari di equazioni differenziali e di equazioni alle differenze. Dopo la discussione di alcune proprietà fondamentali studiamo il caso delle equazioni ai coefficienti costanti. Ciò necessita uno studio approfondito della forma normale di Jordan (cioè delle forme normali delle matrici quadrati invarianti sotto le similarità $A \mapsto Q^{-1}AQ$). Infine discutiamo il teorema di Floquet per i sistemi a coefficienti periodici.

1.1 Proprietà fondamentali dei sistemi lineari

Riportiamo, ora, i principali risultati relativi al sistema lineare (1.1).

Teorema 1.1.1 (Esistenza ed unicità per i sistemi lineari). Siano I un intervallo, $\tau \in I$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$. Siano A e B due funzioni continue a valori in $\mathbb{R}^{n \times n}$ e \mathbb{R}^n rispettivamente. Allora esiste un'unica soluzione del sistema

$$X' = A(t)X + B(t) \quad (1.1)$$

su I che soddisfa il dato iniziale $X(\tau) = \xi$.

Nello studio del sistema (1.1), iniziamo a considerare il caso $B(t) = 0$, ossia il sistema *omogeneo*

$$X' = A(t)X. \quad (1.2)$$

Indicando con X_0 e X_1 due soluzioni del sistema (1.2), è facile verificare che una loro combinazione lineare $\lambda X_0 + \mu X_1$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, è ancora una soluzione di (1.2).

Ciò conduce al seguente:

Teorema 1.1.2. L'insieme \mathcal{S} delle soluzioni del sistema (1.2) su un intervallo I è uno spazio vettoriale reale n -dimensionale.

Vale inoltre il seguente teorema:

Teorema 1.1.3. Sia $\tau \in I$ e siano X_1, X_2, \dots, X_k k soluzioni del sistema (1.2) sull'intervallo I . Allora X_1, X_2, \dots, X_k sono linearmente indipendenti nell'insieme delle soluzioni \mathcal{S} se e soltanto se

$$X_1(\tau) = F_1, \dots, X_k(\tau) = F_k$$

sono linearmente indipendenti in \mathbb{R}^n . In particolare, se $k = n$, allora le funzioni X_1, X_2, \dots, X_n costituiscono una base per \mathcal{S} se e soltanto se:

$$X_1(\tau) = F_1, \quad X_2(\tau) = F_2, \quad \dots, \quad X_n(\tau) = F_n$$

è una base di \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. Fissando $t \in I$, sia $F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathbb{R}^n$ una base per \mathbb{R}^n e supponiamo che, per un opportuno $\tau \in I$, $X_j(t) \in \mathcal{S}$ verifichi la condizione iniziale $X_j(\tau) = F_j$, dove $j = 1, 2, \dots, n$. Supponiamo che esistano costanti $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \dots + c_n X_n(t) = 0$$

per ogni $t \in I$. Dunque,

$$c_1 X_1(\tau) + c_2 X_2(\tau) + \dots + c_n X_n(\tau) = c_1 F_1 + c_2 F_2 + \dots + c_n F_n = 0.$$

Poiché F_1, F_2, \dots, F_n sono linearmente indipendenti, allora $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, e, dunque, anche X_1, X_2, \dots, X_n sono linearmente indipendenti in \mathcal{S} .

Una base per \mathcal{S} si può trovare ponendo $X_j(\tau) = E_j$ per qualche τ fissato,

dove E_1, \dots, E_n è la base canonica di \mathbb{R}^n . Se $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ e $X(\tau) = \xi$, allora

$X = \xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \dots + \xi_n X_n$. Indicando con X_1, X_2, \dots, X_n n soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo (1.2), l'espressione

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \dots + c_n X_n(t),$$

dove c_1, c_2, \dots, c_n sono costanti arbitrarie, costituisce l'integrale generale del sistema (1.2). ■

In notazione matriciale, indicando con $\mathbf{W}(\mathbf{t}) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$ la *matrice fondamentale o matrice wronskiana* (che è $n \times n$) e ponendo

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

si ha che l'integrale generale può essere scritto nella forma

$$X(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}.$$

Il determinante

$$W(t) = \det(\mathbf{W}(t))$$

è detto *determinante wronskiano* del sistema. Spesso il termine *matrice fondamentale* viene riservato per la soluzione unica $\Phi(t, \tau)$ del sistema di Cauchy

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau), \quad \Phi(\tau, \tau) = I.$$

In termini della $\Phi(t, \tau)$ la soluzione unica della (1.1), che soddisfa il dato iniziale $X(\tau) = \xi$, ha la forma

$$X(t) = \Phi(t, \tau)\xi + \int_{\tau}^t \Phi(t, t')B(t') dt'.$$

Le principali proprietà di \mathbf{W} e W sono espresse nei seguenti teoremi:

Teorema 1.1.4. La matrice wronskiana \mathbf{W} verifica la seguente equazione:

$$\mathbf{W}'(t) = A(t)\mathbf{W}(t).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché X_1, X_2, \dots, X_n costituiscano un sistema fondamentale di soluzioni è che il determinante $W(t)$ sia diverso da zero in un punto $t_0 \in I$ (e, di conseguenza, in ogni punti $t \in I$).

Teorema 1.1.5 (Liouville-Jacobi). Sia I un intervallo e sia $t_0 \in I$. Il valore del determinante wronskiano $W(t)$, per ogni $t \in I$, è dato dalla formula

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(u))du},$$

dove

$$\text{tr}(A(u)) = \sum_{k=1}^n a_{kk}(u).$$

In altre parole, il determinante Wronskiano soddisfa l'equazione differenziale

$$W'(t) = \text{tr}(A(u))W(t).$$

Un'equazione differenziale dell'ordine m

$$X^{(m)} = A_0(t)X + A_1(t)X' + A_2(t)X'' + \dots + A_{m-1}(t)X^{(m-1)} + B(t), \quad (1.3)$$

dove $A_0(t), A_1(t), \dots, A_{m-1}(t)$ sono funzioni continue su I a valori in $\mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(t)$ è una funzione continua su I a valori in \mathbb{R}^n , si può convertire in un sistema del primo ordine. Ponendo

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ X'(t) \\ X''(t) \\ \vdots \\ X^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & I & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & I \\ A_0(t) & A_1(t) & \dots & \dots & A_{m-2}(t) & A_{m-1}(t) \end{pmatrix},$$

arriviamo al sistema del primo ordine $mn \times mn$

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t). \quad (1.4)$$

In altre parole, la (1.3) sotto le condizioni iniziali

$$X(\tau) = F_0, \quad X'(\tau) = F_1, \quad \dots, \quad X^{(m-1)}(\tau) = F_{m-1},$$

può essere convertito nel sistema del primo ordine (1.4) sotto la condizione iniziale

$$\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{F},$$

dove \mathbf{F} è il vettore colonna con elementi F_0, F_1, \dots, F_{m-1} .

1.2 Sistemi lineari a coefficienti costanti

Consideriamo un sistema lineare omogeneo di primo ordine

$$X' = AX, \quad (1.5)$$

dove $A \in M_n(\mathbb{R})$ è una matrice reale di ordine n . Il coefficiente matriciale A può essere considerato una funzione costante a valori in $M_n(\mathbb{R})$. Dunque

il teorema 1.1.1 di esistenza ed unicità per i sistemi lineari implica che, dati $\tau \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, esiste un'unica soluzione $X(t)$ continua che soddisfi il sistema (1.5) su \mathbb{R} , dove $X(t) = \xi$. L'insieme \mathcal{S} delle soluzioni del sistema (1.5) è costituito da funzioni definite su tutto l'asse reale, a valori in \mathbb{R}^n . Le soluzioni di tali sistemi si trovano mediante la ricerca degli autovalori e dei corrispondenti autovettori della matrice A . Nel caso $n = 1$ e $A = a \in \mathbb{R}$, il sistema di equazioni (1.5) ha la seguente soluzione generale

$$x(t) = \alpha e^{at}, \text{ dove } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Analogamente, se la matrice A in (1.5) ha la forma diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{(n-1)(n-1)} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

una soluzione del sistema può scriversi nel modo seguente:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \xi_1 e^{a_{11}t} \\ \vdots \\ \xi_n e^{a_{nn}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & e^{a_{(n-1)(n-1)t}} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{a_{nn}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

sotto la condizione iniziale

$$X(0) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Più in generale, supponendo che la matrice A sia diagonalizzabile, cioè che esista $Q \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che $J = Q^{-1}AQ$, dove¹

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_{n-1} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

e λ_j , con $j = 1, \dots, n$, sono gli autovalori di A . Ponendo $Y = Q^{-1}X$, il sistema (1.5) diventa:

$$Y' = JY,$$

¹ $GL(n, \mathbb{R})$ è il gruppo delle matrici reali $n \times n$ con determinante diverso da 0.

la cui soluzione è data da

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & e^{\lambda_{n-1} t} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

sotto la condizione iniziale

$$Y(0) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Quindi, la soluzione del sistema (1.5) può scriversi nel modo seguente:

$$X(t) = QY(t)$$

e soddisfa la condizione iniziale

$$X(0) = Q \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Poiché esistono matrici $n \times n$ non diagonalizzabili, un'opportuna e più efficace generalizzazione di questo procedimento, applicabile a tutti i sistemi a coefficienti costanti, ci porta a considerare la forma canonica di Jordan della matrice A .

1.3 Forma canonica di Jordan

La *forma canonica di Jordan* di un'applicazione lineare (o una trasformazione lineare) f su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita n è un particolare tipo di matrice tramite cui viene rappresentata la f rispetto ad un'opportuna base, detta *base di Jordan*. Nel seguito, verranno riportati il concetto di sottospazio invariante rispetto ad una trasformazione lineare e quello di trasformazione lineare nilpotente, attorno ai quali si sviluppa la forma canonica (anche detta forma normale) di Jordan.

1.3.1 Sottospazi invarianti

Sia f una trasformazione lineare sullo spazio vettoriale reale V .

Definizione 1.3.1. Un sottospazio W dello spazio vettoriale V si dice *invariante sotto la trasformazione lineare f* se si verifica che $f(W) \subset W$. L'applicazione $f|_W$, definita nel seguente modo:

$$f|_W(w) = f(w), \quad w \in W,$$

è una trasformazione lineare su W , detta *restrizione* della f a W .

Osservazioni 1.1. Ogni trasformazione lineare f ammette i sottospazi banali $\{0\}$ e V .

Osservazioni 1.2. Se U è un sottospazio invariante rispetto ad f , di dimensione uno, allora ogni vettore $u \neq 0$ di U è un autovettore della f .

Definizione 1.3.2. Un vettore x di V si dice *invariante rispetto ad f* se si verifica $f(x) = x$.

Osservazioni 1.3. Quindi, una trasformazione lineare ammette un vettore invariante non nullo se e solo se ammette l'autovalore 1. In tal caso, i vettori invarianti costituiscono l'autospazio relativo all'autovalore 1.

Presentiamo ora il seguente teorema:

Teorema 1.3.1. Sia $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m$ un polinomio nella variabile X a coefficienti in \mathbb{R} e si consideri la trasformazione lineare

$$P(f) = a_0I + a_1f + a_2f^2 + \dots + a_mf^m.$$

Allora, il sottospazio $\ker(P(f))$ è un sottospazio invariante rispetto ad f .

Dimostrazione. Poiché risulta

$$P(f)w = a_0w + a_1f(w) + \dots + a_mf^m(w) = 0,$$

allora si ha

$$P(f)(f(w)) = a_0f(w) + a_1f^2(w) + \dots + a_mf^{m+1}(w) = f(P(f)w) = f(0) = 0.$$

■

Seguono i seguenti teoremi:

Teorema 1.3.2. Sia W un sottospazio di V di dimensione k , con $0 < k < n$ (dove n è la dimensione di V), invariante sotto la trasformazione lineare f . Data una base B di V , i cui primi k elementi appartengono a W (e che, pertanto, costituiscono una base B' di W), rispetto a tale base la matrice associata alla trasformazione lineare f è data da²

$$G_B(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad A \in M_{k,k}(\mathbb{R}), B \in M_{k,n-k}(\mathbb{R}), C \in M_{n-k,n-k}(\mathbb{R}).$$

La matrice A rappresenta la matrice associata all'applicazione $f|_W$ rispetto alla base B' .

Teorema 1.3.3. Sia f una trasformazione lineare su V e sia $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r$, dove ogni W_i è un sottospazio invariante rispetto ad f , di dimensione k_i . Data una base B di V , i cui primi k_1 elementi costituiscono una base B_1 di W_1 , \dots , e i cui ultimi k_r elementi costituiscono una base B_r di W_r , rispetto a tale base B la matrice associata alla trasformazione lineare f è la matrice diagonale a blocchi

$$G_B(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_r \end{pmatrix},$$

dove A_i è la matrice associata all'applicazione $f|_{W_i}$, rispetto alla base B_i .

1.3.2 Trasformazioni lineari nilpotenti

Definizione 1.3.3. Una trasformazione lineare t su uno spazio vettoriale V si dice *nilpotente* se esiste un intero positivo h tale che

$$t^h = 0.$$

Definizione 1.3.4. Si definisce *indice* della trasformazione lineare nilpotente t il minimo intero positivo k tale che

$$t^{k-1} \neq 0, \quad t^k = 0.$$

Analogamente, per una matrice valgono le seguenti definizioni:

² $M_{p,q}(\mathbb{R})$ è lo spazio vettoriale reale (di dimensione pq) di tutte le matrici reali $p \times q$.

Definizione 1.3.5. Una matrice quadrata A è definita *nilpotente* se per un intero positivo n si ha

$$A^n = 0,$$

e di *indice* k se:

$$A^{k-1} \neq 0, \quad A^k = 0.$$

Il polinomio minimo³ relativo ad una trasformazione lineare nilpotente di indice k risulta essere $p(t) = t^k$. Quindi, 0 è il suo unico autovalore.

Il risultato più importante sulle trasformazioni lineari nilpotenti è il seguente:

Teorema 1.3.4. Ogni trasformazione lineare nilpotente t di indice k su uno spazio vettoriale V di dimensione finita n è rappresentabile da una matrice diagonale a blocchi, i cui elementi hanno la seguente forma:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

ovvero tutti gli elementi di N sono uguali a zero, ad esclusione di quelli che si trovano immediatamente sopra la diagonale principale che sono tutti uguali ad uno. Il numero complessivo di blocchi coincide con la dimensione di $\ker(t)$ ed esiste almeno un blocco nilpotente elementare di ordine k . Il numero di blocchi di ordine i è dato da

$$2n_i - n_{i+1} - n_{i-1}$$

(dove n_i è la dimensione del $\ker(t^i)$), con la convenzione che $n_i = n$ per $i \geq k$, $n_0 = 0$.

Dimostrazione. Siano v_1, v_2, \dots, v_{p_1} (dove $p_1 \geq 1$) vettori linearmente indipendenti di $V = \ker(t^k)$ e non appartenenti a $\ker(t^{k-1})$. Risulta che

- i) i vettori $t(v_1), \dots, t(v_{p_1})$ appartengono al $\ker(t^{k-1})$ ed una loro combinazione lineare a coefficienti non nulli non appartiene al $\ker(t^{k-2})$.

Infatti, si ha che $t^{k-1}(tv_1) = t^k(v_1) = 0$, giacché $t^k = 0$. Inoltre, se si

³Il polinomio minimo della matrice A è il polinomio $p(t)$ con coefficiente principale 1 e di grado minimo tale che $p(A) = 0$. Ogni polinomio $q(t)$ tale che $q(A) = 0$ è un multiplo del polinomio minimo.

verificasse che $a_1 t(v_1) + \dots + a_{p_1} t(v_{p_1})$ appartenesse al $\ker(t^{k-2})$, e cioè $t^{k-2}(a_1 t(v_1) + \dots + a_{p_1} t(v_{p_1})) = 0$, seguirebbe che

$$a_1 t^{k-1}(v_1) + \dots + a_{p_1} t^{k-1}(v_{p_1}) = t^{k-1}(a_1 v_1 + \dots + a_{p_1} v_{p_1}) = 0,$$

da cui: $a_1 v_1 + \dots + a_{p_1} v_{p_1}$ apparterrebbe al $\ker(t^{k-1})$, e ciò avverrebbe solo se $a_1 = \dots = a_{p_1} = 0$.

- ii) Sia $\{t(v_1), \dots, t(v_{p_1}), v_{p_1+1}, \dots, v_{p_2}\}$ ($p_2 \geq p_1$) una base del sottospazio vettoriale $W = \ker(t^{k-1})$. Allora i vettori

$$t^2(v_1), \dots, t^2(v_{p_1}), \dots, t(v_{p_1+1}), \dots, t(v_{p_2})$$

appartengono al $\ker(t^{k-2})$ ed una loro combinazione lineare a coefficienti non nulli non appartiene al $\ker(t^{k-3})$. Infatti, si ha

$$t^{k-2}(t^2(v_1)) = t^k(v_1) = 0, \dots, t^{k-2}(t^2(v_{p_1})) = t^k(v_{p_1}) = 0,$$

$$t^{k-2}(t(v_{p_1+1})) = t^{k-1}(v_{p_1+1}) = 0, \dots, t^{k-2}(t(v_{p_2})) = t^{k-1}(v_{p_2}) = 0.$$

Inoltre, se

$$t^{k-3}(a_1 t^2(v_1) + \dots + a_{p_1} t^2(v_{p_1}) + a_{p_1+1} t(v_{p_1+1}) + \dots + a_{p_2} t(v_{p_2})) = 0$$

seguirebbe che

$$t^{k-2}(a_1 t(v_1) + \dots + a_{p_1} t(v_{p_1}) + a_{p_1+1} v_{p_1+1} + \dots + a_{p_2} v_{p_2}) = 0,$$

cioè: $a_1 t(v_1) + \dots + a_{p_1} t(v_{p_1}) + a_{p_1+1} v_{p_1+1} + \dots + a_{p_2} v_{p_2}$ apparterrebbe al $\ker(t^{k-2})$, e ciò può verificarsi solo se $a_1 = \dots = a_{p_1} = a_{p_1+1} = \dots = a_{p_2} = 0$.

- iii) Sia $\{t^2(v_1), \dots, t^2(v_{p_1}), t(v_{p_1+1}), \dots, t(v_{p_2}), v_{p_2+1}, \dots, v_{p_3}\}$ ($p_3 \geq p_2$) una base di un sottospazio vettoriale $U = \ker(t^{k-2})$, ecc. Infine si otterranno i vettori

$$t^{k-1}(v_1), \dots, t^{k-1}(v_{p_1}), t^{k-2}(v_{p_1+1}), \dots, t^{k-2}(v_{p_2}), \\ \dots, t(v_{p_{k-2}+1}), \dots, t(v_{p_{k-1}}), v_{p_{k-1}+1}, \dots, v_{p-k},$$

che costituiscono una base di $\ker(t)$; i vettori:

$$t^{k-2}(v_1), \dots, t^{k-2}(v_{p_1}), t^{k-3}(v_{p_1+1}), \dots, t^{k-3}(v_{p_2}), \dots, v_{p-k-2+1}, \dots, v_{p_{k-1}},$$

che costituiscono una base del $\ker(t^2)$. Proseguendo così si può arrivare ai vettori

$$t(v_1), \dots, t(v_{p_1}), v_{p_1+1}, \dots, v_{p_2},$$

che costituiscono una base del $\ker(t^{k-1})$, ed ai vettori:

$$v_1, \dots, v_{p_1},$$

che costituiscono una base di $V = \ker(t^k)$, dove $p_1 \geq 1, p_2 \geq p_1, p_3 \geq p_2$, ecc. Dunque, i vettori sovraindicati costituiscono una base dello spazio vettoriale V , da cui, mediante un opportuno riordinamento, si ottiene la base rispetto a cui t si rappresenta con la forma canonica di Jordan.

Se indichiamo con $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} < n_k = n$ (dove n è la dimensione di V) le dimensioni di $\ker(t), \ker(t^2), \dots, \ker(t^{k-1}), \ker(t^k)$, si ha

$$\begin{cases} p_1 = n_k - n_{k-1} = n - n_{k-1}, \\ p_2 = n_{k-1} - n_{k-2} \geq p_1 \\ p_3 = n_{k-2} - n_{k-3} \geq p_2, \\ \dots\dots\dots \\ p_{k-1} = n_2 - n_1 \geq p_{k-2} \\ p_k = n_1 \geq p_{k-1}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Scriviamo la base di V nel seguente ordine:

$$\begin{cases} t^{k-1}(v_1), t^{k-2}(v_1), \dots, t(v_1), v_1, & k \text{ vettori;} \\ \vdots & \vdots \\ t^{k-1}(v_{p_1}), t^{k-2}(v_{p_1}), \dots, t(v_{p_1}), v_{p_1}, & k \text{ vettori;} \\ t^{k-2}(v_{p_1+1}), t^{k-3}(v_{p_1+1}), \dots, v_{p_1+1}, & k-1 \text{ vettori;} \\ \vdots & \vdots \\ t^{k-2}(v_{p_2}), t^{k-3}(v_{p_2}), \dots, v_{p_2}, & k-1 \text{ vettori;} \\ \vdots & \vdots \\ v_{p_{k-1}+1}, & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ v_{p_k}. & \end{cases}$$

La matrice associata a t rispetto a tale base è una matrice diagonale a blocchi nilpotenti, detta *forma canonica di Jordan della trasformazione lineare nilpotente t* . Ovvero si ha

$$\begin{cases} p_1 (\geq 1), & \text{blocchi di ordine } k; \\ p_2 - p_1 (\geq 0), & \text{blocchi di ordine } k-1; \\ p_3 - p_2 (\geq 0), & \text{blocchi di ordine } k-2; \\ \vdots & \vdots \\ p_k - p_{k-1} (\geq 0), & \text{blocchi di ordine } 1. \end{cases}$$

Il numero totale dei blocchi nilpotenti è, dunque, $p_k = n_1$, cioè la dimensione di $\ker(t)$. Dalla (1.8) segue che il numero di blocchi nilpotenti di ordine i è dato da

$$2n_i - n_{i+1} - n_{i-1},$$

dove $n_i = n$ per $i \geq k$, $n_i = 0$ per $i \leq 0$. ■

1.3.3 Trasformazioni lineari generiche

La forma canonica di Jordan di una trasformazione lineare nilpotente e la scelta della base dello spazio vettoriale reale V di dimensione n sono gli strumenti essenziali per individuare la forma di Jordan di una trasformazione lineare f di V .

Consideriamo le seguenti tre situazioni:

- i) f ha un solo autovalore;
- ii) f ha più autovalori;
- iii) f è rappresentato da una matrice reale, con autovalori non tutti reali; in tal caso, oltre alla forma di Jordan con elementi complessi, si può introdurre anche una forma di Jordan reale.

Se una trasformazione lineare ha un solo autovalore λ_1 , il suo polinomio caratteristico ha la seguente forma:

$$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^n.$$

Per il *teorema di Cayley-Hamilton*,⁴ si ha

$$(f - \lambda_1 I)^n = 0,$$

ossia, la trasformazione lineare t definita da $t = f - \lambda_1 I$, risulta essere nilpotente e di indice $k \leq n$; il polinomio minimo di f è dato da $P_m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^k$. Rispetto alla base per cui t è rappresentato dalla matrice diagonale N a blocchi nilpotenti, si ha $f = t + \lambda_1 I$, che è rappresentato dalla matrice, detta *forma canonica di Jordan*, $N + \lambda_1 I$.

Supponiamo che la trasformazione lineare f abbia più autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ e che il suo polinomio caratteristico si decomponga nel seguente modo:

$$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}.$$

⁴Teorema di Cayley-Hamilton: Ogni matrice verifica il suo polinomio caratteristico.

Indichiamo con A la matrice associata alla trasformazione lineare f rispetto ad una base di V . Gli autospazi di f sono i sottospazi $V(\lambda_i)$ (dove $i = 1, \dots, r$) dello spazio vettoriale V , così definiti:

$$V(\lambda_i) = \ker(f - \lambda_i I) = \ker(A - \lambda_i I).$$

Sono chiamati *autospazi generalizzati* di f i sottospazi $E(\lambda_i)$ di V , così definiti:

$$E(\lambda_i) = \ker(f - \lambda_i I)^{m_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{m_i}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Allora $V(\lambda_i) \subset E(\lambda_i)$ e la matrice A è diagonalizzabile se e solo se:

$$V(\lambda_i) = E(\lambda_i).$$

Si ha, dunque, il seguente teorema:

Teorema 1.3.5. Sia f una trasformazione lineare sullo spazio vettoriale V di dimensione n su \mathbb{R} e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gli zeri distinti del polinomio caratteristico di f , tutti appartenenti ad \mathbb{R} e di molteplicità algebrica m_1, \dots, m_r . Indicando con $E(\lambda_i)$ l'autospazio generalizzato di f , relativo all'autovalore λ_i , si ha

- i) $E(\lambda_i)$ è un sottospazio invariante rispetto ad f , ossia se x_i appartiene ad $E(\lambda_i)$, anche $f(x_i)$ appartiene ad $E(\lambda_i)$;
- ii) $V = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_r)$, ossia ogni vettore x di V si scrive nel seguente unico modo:

$$x = x_1 + \dots + x_r, \quad x_i \in E(\lambda_i);$$

- iii) la dimensione di ogni autospazio generalizzato di f è data da

$$\dim(E(\lambda_i)) = m_i, \quad i = 1, \dots, r;$$

- iv) la restrizione f_i di f al sottospazio $E(\lambda_i)$ presenta soltanto l'autovalore λ_i di molteplicità algebrica m_i . Pertanto, si può decomporre in

$$f_i = s_i + t_i,$$

dove $s_i = \lambda_i I_{E(\lambda_i)}$ e t_i è la componente nilpotente della restrizione f_i della f al sottospazio $E(\lambda_i)$.

Osservazioni 1.4. Per la parte i), la trasformazione lineare f_i sull'autospazio $E(\lambda_i)$ si può considerare una trasformazione lineare sullo spazio vettoriale V che agisce come f su $E(\lambda_i)$ e si annulla su $E(\lambda_j)$, per $j \neq i$. La trasformazione lineare f si può scrivere nel seguente modo:

$$f = f_1 + \dots + f_r,$$

ovvero, se $x = x_1 + \dots + x_r$, risulta

$$f(x) = f(x_1) + \dots + f(x_r) = f_1(x_1) + \dots + f_r(x_r).$$

Si ha

$$f = f_1 + \dots + f_r = s_1 + \dots + s_r + t_1 + \dots + t_r = s + t,$$

dove $s = s_1 + \dots + s_r$, $t = t_1 + \dots + t_r$, $st = ts$, t nilpotente.

Dimostrazione. Supponiamo valide le parti i) e ii), la cui dimostrazione sarà data successivamente, e dimostriamo le ultime due parti. Scegliamo come base B dello spazio vettoriale V l'unione delle basi dei sottospazi $E(\lambda_i)$, rispetto a cui ogni f_i assume la forma canonica di Jordan. Nella matrice associata ad f rispetto a tale base, ogni λ_i compare lungo la diagonale principale un numero di volte pari alla dimensione di $E(\lambda_i)$. Poiché l'equazione caratteristica di f è indipendente dalla base, ogni λ_i deve comparire esattamente m_i volte, da cui la dimensione degli autospazi $E(\lambda_i)$ è data da

$$\dim(E(\lambda_i)) = m_i.$$

Quindi, rispetto alla base B , f è rappresentata nella forma canonica di Jordan e la sua matrice è costituita da r blocchi, disposti lungo la diagonale principale, di ordini m_1, \dots, m_r relativi agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.

Per quanto riguarda la parte iv), osserviamo che si ha

$$(f - \lambda_i I_{E(\lambda_i)})^{m_i} x_i = (f - \lambda_i I_V)^{m_i} x_i = 0, \quad x_i \in E(\lambda_i).$$

Le parti i) e ii) sono conseguenze dei risultati del prossimo teorema, applicato ai fattori $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$, primi fra loro, in cui viene fattorizzato il polinomio caratteristico di f :

$$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}.$$

■

Teorema 1.3.6. Sia $P(\lambda)$ il polinomio caratteristico di una trasformazione lineare f su uno spazio vettoriale V , di dimensione n , e sia tale da potersi scrivere: $P(\lambda) = P_1(\lambda)P_2(\lambda)$, dove i polinomi $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$ sono primi fra loro. I sottospazi $E_1 = \ker P_1(f)$ e $E_2 = \ker P_2(f)$ sono invarianti rispetto ad f e risulta che $V = E_1 \oplus E_2$.

Dimostrazione. Se x_1 appartiene a $E_1 = \ker P_1(f)$, cioè $P_1(f)(x_1) = 0$, e poiché risulta che $fP_1(f) = (P_1(f))f$, si ha

$$(P_1(f))(f(x_1)) = f(P_1(f)(x_1)) = 0,$$

da cui $f(x_1)$ appartiene ad E_1 , che dimostra l'invarianza di E_1 rispetto ad f . Analoga dimostrazione per E_2 . Poiché i polinomi $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$ sono primi tra loro, esistono due altri polinomi $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$ tali che

$$P_1(\lambda)Q_1(\lambda) + P_2(\lambda)Q_2(\lambda) = 1.$$

Questa relazione può scriversi nel seguente modo:

$$P_1(f)Q_1(f) + P_2(f)Q_2(f) = I_V.$$

Pertanto, per ogni $x \in V$ si ha

$$x = P_1(f)Q_1(f)(x) + P_2(f)Q_2(f)(x). \quad (1.9)$$

Poiché per il *teorema di Cayley-Hamilton* risulta

$$P_1(f)P_2(f)Q_2(f)(x) = P(f)Q_2(f)(x) = Q_2(f)P(f)(x), \quad P(f) = 0,$$

segue che: $P_1(f)Q_1(f)(x) \in E_2$ e, dunque, la (1.9) esprime V come la somma diretta di E_1 e E_2 .

Per dimostrare che V è la somma diretta di tali sottospazi, si può dimostrare che $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Infatti, se, per assurdo, w appartiene a $E_1 \cap E_2$, risulta che

$$w = P_1(f)Q_1(f)(w) + P_2(f)Q_2(f)(w).$$

Ma $P_1(f)Q_1(f)(w) = Q_1(f)P_1(f)(w) = 0$, poiché w appartiene a E_1 . Analogamente, $P_2(f)Q_2(f)(w) = 0$, poiché w appartiene a E_2 . Cioè, $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

■

Esempio 1.1. Proviamo a determinare la forma canonica di Jordan ed una base rispetto alla quale sussiste tale forma per la trasformazione lineare f su \mathbb{R}^5 , rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 0 & 6 & -3 \\ 7 & 6 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)^3(\lambda - 2)^2.$$

I sottospazi generalizzati di A sono i sottospazi:

$$E(-1) = \ker(A + I)^3, \quad E(2) = \ker(A - 2I)^2,$$

che hanno rispettivamente dimensione 3 e 2 e sono costituiti dagli elementi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ di \mathbb{R}^5 che soddisfano i seguenti sistemi:

$$E(-1) : \quad x_1 + x_2 = 0, \quad 4x_4 - 3x_5 = 0$$

$$E(2) : \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad 2x_1 - x_2 + 3x_5 = 0.$$

Una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ di $E(-1)$, rispetto alla quale la trasformazione lineare f_1 , restrizione di f ad $E(-1)$, assume la forma canonica di Jordan, è data, ad esempio, da

$$u_1 = (6, -6, 3, 0, 0), \quad u_2 = (0, 0, 0, 3, 4), \quad u_3 = (0, 0, 1, 0, 0),$$

dove u_2 appartiene ad $E(-1)$, ma non a $V(-1)$, che risulta essere l'autospazio relativo all'autovalore -1 , avente dimensione due e definito dal sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_4 = x_5 = 0. \end{cases}$$

Il vettore $u_1 = (A + I)u_2$ appartiene all'autospazio $V(-1)$, mentre u_3 è un elemento di $V(-1)$, indipendente da u_1 . La trasformazione lineare f_1 su $E(-1)$, rispetto a tale base, è rappresentato da

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Una base di $E(2)$, rispetto alla quale la trasformazione lineare f_2 , restrizione di f ad $E(2)$, assume la forma canonica, è data dai vettori:

$$u_4 = (-15, 15, 0, 0, 15), \quad u_5 = (1, 2, 0, 0, 0),$$

dove u_5 appartiene ad $E(2)$, ma non a $V(2)$, che risulta essere l'autospazio relativo all'autovalore 2 ed è dato da $x_1(1, -1, 0, 0, -1)$. Il vettore $u_4 = (A - 2I)u_5$ appartiene a $V(2)$ e la forma canonica di f_2 rispetto alla base $\{u_4, u_5\}$ è data da

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ di \mathbb{R}^5 , la trasformazione lineare f è rappresentata dalla matrice:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Risulta $A' = S' + T'$, dove S' è una matrice diagonale e T' è nilpotente e sono date da

$$S' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $A' = P^{-1}AP$, dove

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -15 & 1 \\ -6 & 0 & 0 & 15 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{18} & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{45} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3.4 Forme di Jordan reali

Supponiamo di avere una trasformazione lineare f su uno spazio complesso, rappresentata da una matrice A ad elementi reali, il cui polinomio caratteristico presenta anche degli zeri complessi. È utile mostrare una rappresentazione canonica di questa trasformazione lineare mediante una matrice ad elementi reali, detta *forma di Jordan reale*.

Per farlo, ricordiamoci che, in corrispondenza agli autovalori complessi di A , si hanno anche i complessi coniugati, dotati della medesima molteplicità algebrica. Indichiamo con $z = u + iv$ l'autovettore relativo all'autovalore complesso $\lambda = a + ib$ nella base di Jordan complessa, e con $\bar{z} = u - iv$ il corrispondente autovettore complesso coniugato relativo all'autovalore $\bar{\lambda} = a - ib$. In luogo dei vettori z, \bar{z} , possiamo utilizzare i vettori reali $u = \operatorname{Re}(z)$ e $v = \operatorname{Im}(z)$, mediante i quali possiamo ottenere la rappresentazione reale di

Jordan, caratterizzata dai blocchi diagonali della seguente forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix},$$

che sostituiscono le seguenti coppie di blocchi diagonali:

$$\begin{pmatrix} a+ib & 1 \\ 0 & a+ib \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a-ib & 1 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix},$$

presenti nella forma di Jordan complessa.

Esempio 1.2. Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo la forma canonica di Jordan complessa e reale della matrice A . Facilmente si trova che $\lambda_1 = 2+i$ risulta essere un autovalore doppio della matrice A . Quindi, anche il complesso coniugato $\lambda_2 = 2-i$ è un autovalore doppio e non si hanno altri autovalori. Inoltre, risulta che $\ker(A - \lambda_1 I) = \{(ix_3, x_3, x_3, 0)\}$, $\ker(A - \lambda_1 I)^2 = \{(ix_2, x_2, x_3, -ix_2 + ix_3)\}$. Il vettore $u_2 = (0, 0, 1, i)$ appartiene al $\ker(A - \lambda_1 I)^2$, ma non al $\ker(A - \lambda_1 I)$ e risulta che $u_1 = (A - \lambda_1 I)u_2 = (-i, -1, -1, 0)$ appartiene al $\ker(A - \lambda_1 I)$.

Con gli altri vettori $u_3 = \bar{u}_1 = (i, -1, -1, 0)$ e $u_4 = \bar{u}_2 = (0, 0, 1, -i)$, rimane definita la base rispetto alla quale sussiste la forma canonica di Jordan complessa

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}.$$

Consideriamo i vettori reali $e_1 = \operatorname{Re}(u_1) = (0, -1, -1, 0)$, $e_2 = \operatorname{Im}(u_1) = (-1, 0, 0, 0)$, $e_3 = \operatorname{Re}(u_2) = (0, 0, 1, 0)$ e $e_4 = \operatorname{Im}(u_2) = (0, 0, 0, 1)$. Rispetto a questa base, si trova la forma canonica di Jordan reale

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.3.5 Forme di Jordan di matrici di ordine 2 e 3

Proviamo a riassumere quanto sopra detto, elencando le possibili forme di Jordan di una trasformazione lineare f su uno spazio vettoriale di dimensione due e tre.

Caso $n = 2$.

Sia A una matrice di Jordan del secondo ordine. Essa si può presentare nelle seguenti forme:

- 1) A possiede due autovalori distinti di molteplicità 1, λ_1, λ_2 . ed è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix};$$

- 2) A possiede un solo autovalore λ_1 di molteplicità 2 ed è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix};$$

- 3) A possiede un solo autovalore λ_1 ma non è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Caso $n = 3$.

Sia A una matrice di Jordan del terzo ordine. Essa si può presentare nelle seguenti forme:

- 1) A possiede tre autovalori distinti di molteplicità 1, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ed è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix};$$

- 2) A possiede gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ che si trovano nella seguente relazione: $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Essa è data da

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

oppure

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

a seconda che l'autospazio $V(\lambda_1)$ abbia dimensione due, oppure uno.

3) Gli autovalori di A sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. A è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

oppure A non è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

oppure A non è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

a seconda che il minimo esponente k , per il quale si ha $(A - \lambda_1 I)^k$, sia $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, cioè a seconda che l'autospazio $V(\lambda_1)$ abbia dimensione 3, 2, 1.

Consideriamo, ora, le forme di Jordan reali, nella dimensione due e tre, classificandole nel seguente modo:

a) sia $\mathbf{n} = 2$. Supponiamo che l'equazione caratteristica della matrice A ammetta soluzioni complesse coniugate, date da $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, alle quali corrispondono rispettivamente gli autovettori complessi coniugati: $z = u + iv$, $\bar{z} = u - iv$, dove $u, v \in \mathbb{R}^2$. Quindi, si ha

$$Az = A(u + iv) = (a + ib)(u + iv),$$

da cui, poiché A è ad elementi reali, eguagliando parti reali ed immaginarie tra loro, si ottiene

$$\begin{cases} Au = au - bv, \\ Av = bu + av. \end{cases}$$

Scegliamo come base di \mathbb{R}^2 la coppia di vettori $\{u, v\}$, che risultano linearmente indipendenti per definizione di z e \bar{z} , e rispetto a tale base la forma reale di Jordan, associata alla trasformazione lineare f su \mathbb{R}^2 , è data da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

b) Sia $\mathbf{n} = \mathbf{3}$. Si ha la seguente classificazione:

- 1) A ha soltanto autovalori reali, e, dunque, è simile ad una delle forme canoniche di Jordan del terzo ordine, con elementi reali sulla diagonale principale;
- 2) l'equazione caratteristica di A ha una soluzione reale λ_1 , alla quale corrisponde un autospazio $V(\lambda_1)$ di dimensione uno e base $\{w\}$, e due soluzioni complesse coniugate $\lambda_2 = a + ib$, $\lambda_3 = a - ib$. A questi autovalori complessi corrispondono rispettivamente gli autovettori complessi coniugati:

$$z = u + iv, \quad \bar{z} = u - iv.$$

Poiché z e \bar{z} sono linearmente indipendenti, lo sono anche i vettori reali $u = \operatorname{Re}(z)$ e $v = \operatorname{Im}(z)$ che costituiscono una base di \mathbb{R}^2 . Lo spazio \mathbb{R}^3 è dato dalla somma diretta dell'autospazio $V(\lambda_1)$ e del piano individuato dalla coppia di vettori $\{u, v\}$. Rispetto alla base $\{w, u, v\}$, la trasformazione lineare f su \mathbb{R}^3 è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}.$$

Esempio 1.3. Consideriamo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una base di \mathbb{R}^2 rispetto alla quale la trasformazione lineare f individuata da A si rappresenta nella forma canonica di Jordan. L'equazione caratteristica di A si ottiene nel modo seguente:

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)(4 - \lambda) + 1 = (\lambda - 3)^2 = 0.$$

Quindi, si ha un autovalore reale doppio $\lambda = 3$. Risulta che $A = 3I + T$, dove T è data da :

$$T = A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dove T è nilpotente di indice due.

Consideriamo, ora, un vettore v_2 tale che $Tv_2 \neq 0$. Per esempio, $v_2 = (1, 0)$. Possiamo prendere $v_1 = Tv_2 = (-1, 1)$. Rispetto alla base $\{v_1, v_2\}$, la matrice della trasformazione lineare f , associata ad A , è data da

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = S' + T', \quad S' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice T' rappresenta, rispetto alla base $\{v_1, v_2\}$, la trasformazione lineare nilpotente t associata alla matrice T rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2\}$. Indicando con P la matrice avente come colonne i vettori v_1 e v_2 :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha

$$A' = P^{-1}AP, \quad T' = P^{-1}TP.$$

Esempio 1.4. Consideriamo la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \\ 9 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una base di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale la trasformazione lineare f , individuata da A , si rappresenta nella forma canonica di Jordan. Facilmente si ottiene che $\lambda = 2$ risulta essere un autovalore di A con molteplicità algebrica 3 e l'autospazio relativo, $V(2)$, ha dimensione uno, avente base data da $(1, -1, 0)$. Risulta, inoltre, che $A = 2I + T$, dove T , nilpotente di indice 3, è data da

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 9 & 9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo un vettore v_3 tale che $Tv_3 \neq 0$. Prendiamo, poi, gli altri vettori nel seguente modo:

$$v_2 = Tv_3, \quad v_1 = T^2v_3.$$

Se, dunque, $v_3 = (1, 0, 0)$, si ha $v_2 = (2, 4, 9)$ e $v_1 = (3, -3, 0)$. Rispetto a questa base di \mathbb{R}^3 , $\{v_1, v_2, v_3\}$, la trasformazione lineare f è rappresentata dalla matrice:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{27} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 1 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Esempio 1.5. Consideriamo nello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 il vettore $u = (1, 0, 1)$ ed il sottospazio $V = \{(x, y, z) : y - z = 0, x - y - z = 0\}$, supponendo che la trasformazione lineare f su \mathbb{R}^3 sia tale che $V = \ker(f)$, u sia un suo autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 2$ ed, inoltre, $f(0, 0, 1) = (-1, 0, 1)$. Determiniamo la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 ed una base di \mathbb{R}^3 , rispetto alla quale f è dato in forma canonica di Jordan. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di \mathbb{R}^3 . Facilmente si trova che una base del $\ker(f)$ è il vettore $v = (2, 2, 1)$. Le condizioni di definizione di f ci consentono di ottenere

$$\begin{aligned} f(v) &= 0, & 2f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) &= 0, \\ f(u) &= 2u, & f(e_1) + f(e_3) &= 2e_1 + 2e_3, \\ f(0, 0, 1) &= (-1, 0, 1), & f(e_3) &= -e_1 + e_3. \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema nelle incognite $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, si ottiene

$$f(e_1) = 3e_1 + e_3, \quad f(e_2) = -5e_1 - 3e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + e_3.$$

La matrice A , associata ad f , rispetto alla base $\{e_1, e_2, e_3\}$, è data da

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'equazione caratteristica di A è

$$\lambda(\lambda - 2)^2 = 0,$$

e, dunque, f presenta l'autovalore semplice $\lambda_1 = 0$ e l'autovalore doppio $\lambda_2 = 2$. L'autospazio $V(2)$ è costituito dai vettori del tipo $(t, 0, t)$, e, dunque, esso ha dimensione uno. Una sua base è data da $w = (1, 0, 1)$. Determiniamo l'autospazio generalizzato $E(2)$, dato dal $\ker(f - 2I)^2$. Si ha

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue che l'autospazio $E(2)$ presenta equazione $y = 0$.

Costruiamo una base di \mathbb{R}^3 , rispetto alla quale la trasformazione lineare f si rappresenta in forma canonica. Prendiamo $v_2 = (1, 0, 0)$ tale che non appartenga a $V(2)$, ma si trovi in $E(2)$, e $v_1 = (f - 2I)v_2 = (1, 0, 1)$. Prendiamo, poi, v_3 come vettore non nullo di $E(0) = V(0) = \ker(f)$. Per esempio, $v_3 = (2, 1, 1)$.

Rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$, la trasformazione lineare f si rappresenta nella forma canonica di Jordan:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove P è la matrice avente per colonne le componenti dei vettori v_1, v_2, v_3 , rispetto alla base canonica.

1.4 Esponenziale di una matrice

Un altro modo per rappresentare l'integrale generale del sistema differenziale

$$X' = AX \tag{1.10}$$

si ottiene mediante l'esponenziale di una matrice.

Abbiamo già osservato come nel caso in cui $n = 1$ il sistema (1.10) si riduce all'equazione differenziale lineare

$$x' = ax,$$

il cui integrale generale è dato da $x(t) = ce^{at}$, dove c è una costante reale arbitraria. La funzione e^{at} è la somma della serie di potenze

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \dots + \frac{a^nt^n}{n!} + \dots$$

Scrivendo l'esponenziale della matrice nel modo seguente:

$$e^{At} = I + At + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots,$$

è facile verificare che la serie di matrici al secondo membro è convergente. L'integrale generale del sistema (1.10) è dato da

$$X(t) = e^{At}\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

dove \mathbf{c} è il vettore colonna delle c_1, c_2, \dots, c_n costanti reali arbitrarie. In particolare, la soluzione unica del problema di Cauchy

$$X'(t) = AX(t) + g(t), \quad X(0) = \mathbf{c},$$

ha la seguente forma:

$$X(t) = e^{At} \mathbf{c} + \int_0^t e^{A(t-t')} g(t') dt'.$$

Casi particolari. Elenchiamo brevemente le proprietà dell'esponenziale di una matrice:

- 1) Sia D una matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

allora si ha

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

- 2) Sia P una matrice quadrata invertibile dello stesso ordine della matrice A . Allora si ha

$$e^{(P^{-1}AP)t} = P^{-1}e^{At}P.$$

- 3) Siano A, B due matrici quadrate dello stesso ordine che commutano tra loro, cioè $AB = BA$. Allora si ha

$$e^{(A+B)t} = (e^{At})(e^{Bt}).$$

La seconda proprietà viene utilizzata per l'integrazione del sistema (1.10) nel caso in cui la matrice A sia diagonalizzabile. Allora, P è la matrice avente per colonne le componenti di una base di autovettori di A . Infatti, risulta

$$e^{(P^{-1}AP)t} = e^{Dt} = P^{-1}e^{At}P,$$

da cui segue

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}.$$

Nel caso in cui A non sia diagonalizzabile, estendendo eventualmente A al campo dei numeri complessi, essa ammette una forma canonica di Jordan:

$$J = P^{-1}AP = S + N,$$

dove S è una matrice diagonale ed N è una matrice nilpotente e sono tali che:

$$e^{Jt} = e^{(S+N)t} = (e^{St})(e^{Nt}),$$

cioè commutano tra loro.

Applicazione ai sistemi lineari. Consideriamo il sistema differenziale:

$$x' = Ax, \tag{1.11}$$

dove A è una matrice a λ -blocchi di Jordan (con $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ponendo $A = \lambda + N$, dove

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

possiamo scrivere l'espressione generale della soluzione del sistema (1.11), mediante l'esponenziale di una matrice, ossia:

$$\begin{aligned} x(t) &= ce^{At} = c(e^{\lambda t})(e^{Nt}) = ce^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k N^k}{k!} = \\ &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analogamente, supponendo che $\lambda = a + ib$, la matrice A è una matrice reale a λ -blocchi di Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ I & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & \dots & I & D \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso la soluzione generale del sistema (1.11) può essere espressa mediante l'esponenziale di una matrice.

Indichiamo con m il numero dei blocchi D contenuti nella matrice A in maniera tale che $n = 2m$. Consideriamo, allora, l'equazione

$$z' = Bz, \tag{1.12}$$

dove z è una funzione a valori in \mathbb{C}^m e B è una matrice $m \times m$ complessa:

$$B = \begin{pmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & \mu \end{pmatrix}, \quad \mu = a + ib.$$

Identifichiamo \mathbb{C}^m con \mathbb{R}^{2m} mediante la relazione

$$\begin{aligned} z = (z_1, z_2, \dots, z_m) &= (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \dots, x_m + iy_m) \\ &\simeq (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m). \end{aligned}$$

Possiamo, dunque, scrivere la soluzione generale del sistema (1.12):

$$z_j(t) = e^{\mu t} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} c_{j-k}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Ponendo $c_k = p_k + iq_k$ (con $k = 1, \dots, m$), ed utilizzando l'identità

$$e^{t(a+ib)} = e^{at} [\cos(bt) + i \sin(bt)],$$

otteniamo

$$\begin{aligned} x_j(t) &= e^{at} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} [p_{j-k} \cos(bt) - q_{j-k} \sin(bt)], \quad j = 1, \dots, m, \\ y_j(t) &= e^{at} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{t^k}{k!} [q_{j-k} \cos(bt) + p_{j-k} \sin(bt)], \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

1.5 Potenze intere di una matrice

Invece dell'esponenziale di una matrice quadrata A , si possono anche studiare le sue potenze intere nonnegative A^k , $k = 0, 1, 2, \dots$, dove $A^0 = I$. Esse importano per la risoluzione esplicita del sistema alle differenze

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.13)$$

dove ogni x_k è un vettore colonna in \mathbb{R}^n e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è il dato iniziale. In tal caso la soluzione è una banalità:

$$x_k = A^k x_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

È inoltre facile dimostrare che la soluzione unica dell'equazione non omogenea

$$x_{k+1} = Ax_k + g_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\{g_k : k = 0, 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}^n$ sono note, è data dalla formula

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-1-l} g_l, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Supponiamo di avere una relazione di ricorrenza (ad m termini) del tipo

$$x_{k+m} = A_0 x_k + A_1 x_{k+1} + \dots + A_{m-1} x_{k+m-1}, \quad (1.15)$$

dove ogni x_k appartiene ad \mathbb{R}^n , A_0, A_1, \dots, A_{m-1} sono matrici $n \times n$, e x_0, x_1, \dots, x_{m-1} servono come i dati iniziali. In analogia con la conversione di un'equazione differenziale dell'ordine m in un sistema del primo ordine [cf. (1.3)-(1.4)], poniamo

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+m-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & I & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & I \\ A_0 & A_1 & \dots & \dots & A_{m-2} & A_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza, otteniamo il sistema del primo ordine

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.16)$$

dove \mathbf{x}_0 contiene i dati iniziali.

Esercizio 1.1. Consideriamo ora la relazione di ricorrenza di Fibonacci

$$x_{k+2} = x_k + x_{k+1},$$

dove ogni x_k è un numero reale e x_0, x_1 sono i dati iniziali. Il corrispondente sistema del primo ordine è dato da

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix},$$

dove la matrice 2×2 ha i due autovalori semplici $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. La matrice diagonalizzante S , la quale ha come colonne i corrispondenti autovettori, e la sua matrice inversa S^{-1} sono date da

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) & 1 \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) & -1 \end{pmatrix}.$$

Infatti,

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza

$$A^k = S \begin{pmatrix} [\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})]^k & 0 \\ 0 & [\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})]^k \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{pmatrix},$$

dove

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \right]^k - \left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \right]^k \right).$$

Si vede facilmente che $f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$, dove $f_0 = f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 3$, $f_4 = 5$, $f_5 = 8$, $f_6 = 13$, $f_7 = 21$, $f_8 = 34$, $f_9 = 55$, $f_{10} = 89$, $f_{11} = 134$, ecc. I numeri f_k sono i termini della famosa successione di Fibonacci.

Esercizio 1.2. Per un parametro $x \in \mathbb{R}$, consideriamo la relazione di ricorrenza

$$T_{k+2}(x) = 2xT_{k+1}(x) - T_k(x),$$

dove $T_0(x)$ e $T_1(x)$ sono i dati iniziali (funzioni scalari di x). Il corrispondente sistema del primo ordine è dato da

$$\begin{pmatrix} T_{k+1}(x) \\ T_{k+2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_k(x) \\ T_{k+1}(x) \end{pmatrix},$$

dove gli autovalori della matrice 2×2 sono uguali a $x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ per $|x| > 1$, $x \pm i\sqrt{1 - x^2}$ per $|x| < 1$ e ± 1 per $x = \pm 1$. Limitiamoci al caso $|x| < 1$,

dove gli autovalori possono essere rappresentati da $e^{\pm it}$ con $x = \cos(t)$ per $t \in (0, \pi)$.⁵ Risulta la diagonalizzazione $S^{-1}AS = \text{diag}(e^{it}, e^{-it})$, dove

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{it} & e^{-it} \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = -\frac{1}{2i \sin(t)} \begin{pmatrix} e^{-it} & -1 \\ -e^{it} & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} A^k &= S \begin{pmatrix} e^{ikt} & 0 \\ 0 & e^{-ikt} \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(k-1)t}{\sin t} & \frac{\sin kt}{\sin t} \\ -\frac{\sin kt}{\sin t} & \frac{\sin(k+1)t}{\sin t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -U_{k-2}(x) & U_{k-1}(x) \\ -U_{k-1}(x) & U_k(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove $U_k(x)$ è un polinomio in x di grado k , il cosiddetto polinomio di Chebyshev di seconda specie.⁶ Scegliendo le condizioni iniziali $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$, troviamo

$$T_k(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} A^k \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \cos kt.$$

In tal caso $T_k(x)$ è un polinomio in x di grado k , il cosiddetto polinomio di Chebyshev di prima specie.

1.6 Studio qualitativo

Consideriamo il problema di Cauchy

$$u' = g(t)h(u), \quad u(t_0) = u_0, \quad (1.17)$$

dove supponiamo per esempio che $h(u) \in C(J)$ e $g(t) \in C(I)$, essendo I e J intervalli aperti.

Osserviamo innanzitutto che se u_0 è uno zero di $h(u)$, allora la funzione costante $u = u_0$ soddisfa ovviamente la (1.17); abbiamo dunque gli integrali particolari

$$u(t) \equiv u_0, \quad \text{per ogni } u_0 \text{ con } h(u_0) = 0. \quad (1.18)$$

Se ora $u(t)$ è una soluzione non costante e $h(u)$ soddisfa le ipotesi per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy (1.17), per esempio $h(u) \in C^1(J)$, il suo grafico non potrà intersecare nessuna retta $u = u_0$ con $h(u_0) = 0$

⁵Per $|x| > 1$ utilizziamo la rappresentazione $x = \cosh(t)$ e gli autovalori $e^{\pm t}$.

⁶ $U_{-1}(x) \equiv 0$, $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$, ecc. soddisfano la relazione di ricorrenza $U_{k+2}(x) = 2xU_{k+1}(x) - U_k(x)$.

e risulterà quindi $h(u(t)) \neq 0$ per tutti i $t \in I_{max}$, dove I_{max} è l'intervallo massimale di esistenza della soluzione. Con il termine studio qualitativo indichiamo, qualora sia impossibile ottenere la soluzione $u(t)$ esplicitamente, lo studio di

$$\int_{u_0}^u \frac{1}{h(\eta)} d\eta = \int_{t_0}^t g(\xi) d\xi \quad (1.19)$$

e il disegno (approssimativo, ma possibilmente assai preciso per quanto riguarda i punti notevoli del grafico, l'andamento e la convessità (concavità)) del grafico di $u(t)$.

Diamo un elenco di esercizi per lo studio qualitativo:

Esercizio 1.3. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

$$\text{VS1) } u' = \sqrt{\frac{\sin u}{\sin t}}, \quad u(t_0) = u_0, \quad u_0, t_0 \in]0, \pi[.$$

$$\text{VS2) } u' = \pm t^\alpha u^\beta, \quad u(t_0) = u_0, \quad \text{essendo } \alpha \text{ e } \beta \text{ parametri reali.}$$

$$\text{VS3) } u' = \cos u, \quad u(t_0) = u_0.$$

$$\text{VS4) } u' = \arctg(u), \quad u(t_0) = u_0.$$

$$\text{VS5) } u' = \sqrt{\frac{1+u^2}{1+t^4}}, \quad u(t_0) = u_0.$$

$$\text{VS6) } u' = \frac{e^u - 1}{t}, \quad u(t_0) = u_0, \quad t_0 \neq 0.$$

$$\text{VS7) } u' = \sqrt{\frac{\ln(1+u)}{\sin t}}, \quad u(t_0) = u_0, \quad u_0 > 0, \quad t_0 \in]0, \pi[\text{ o } u_0 \in]0, 1[, \quad t_0 \in]-\pi, 0[.$$

Rivisitiamo l'equazione lineare

$$u' = p(t)u + q(t), \quad u(t_0) = u_0, \quad (1.20)$$

essendo $p(t)$ e $q(t)$ due funzioni assegnate, definite continue in un intervallo aperto I .

La ben nota formula⁷

$$u = e^{\int p(s) ds} \left[\int q(w) e^{-\int^w p(s) ds} dw + C \right]. \quad (1.21)$$

⁷Stiamo parlando della soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea del primo ordine.

è utile nel caso in cui gli integrali in (1.21) sono risolvibili in quadrature, altrimenti si può studiare la soluzione della (1.20) (come per lo studio qualitative delle equazioni variabili separabili), usando gli integrali definiti

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s) ds} \left[u_0 + \int_{t_0}^t q(s) e^{-\int_{t_0}^s p(\tau) d\tau} ds \right]. \quad (1.22)$$

Diamo un elenco di esercizi teorici.

Esercizio 1.4. Siano $p(t)$ e $q(t)$ funzioni periodiche con periodo $T > 0$. Dimostrare che:

L1. La condizione necessaria e sufficiente affinché $\exists u \neq 0$ soluzione T -periodica di $u' = p(t)u$ è $\int_0^T p(t)dt = 0$.

L2. La condizione necessaria e sufficiente affinché per \forall soluzione della (1.17) $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$ è $\int_0^T p(t)dt < 0$.

L3. La condizione necessaria e sufficiente affinché per \forall soluzione della (1.17) $\sup_{t \in [0, +\infty[} |u(t)| < +\infty$ è $\int_0^T p(t)dt \leq 0$.

L4. La condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le soluzioni della (1.17) siano limitate sulla retta $] -\infty, +\infty[$ è $\int_0^T p(t)dt = 0$.

1.7 Teorema di Floquet

Rivisitiamo l'equazione lineare

$$u' = p(t)u + q(t), \quad u(t_0) = u_0, \quad (1.23)$$

essendo $p(t)$ e $q(t)$ due funzioni assegnate, definite continue in \mathbb{R} e periodiche con periodo T .

La ben nota formula [vedi la (1.21)]

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s) ds} \left[u_0 + \int_{t_0}^t q(s) e^{-\int_{t_0}^s p(\tau) d\tau} ds \right]. \quad (1.24)$$

permette di studiare le soluzioni T -periodiche dell'equazione scalare (1.23).

Si dimostra facilmente, tenendo conto dall'identità (1.24), che:

L1. La condizione necessaria e sufficiente affinché $\exists u \neq 0$ soluzione non nulla e T -periodica di $u' = p(t)u$ è $\int_0^T p(t)dt = 0$.

L2. Esiste un cambiamento delle funzioni incognite $u(t) = s(t)v(t)$ dove $s(t)$ è una funzione C^1 e T -periodica, tale che $u(t)$ soddisfa $u'(t) = p(t)u$ se e solo se $v(t)$ soddisfa $v'(t) = bv(t)$ per una costante b . Trovate b .

Consideriamo adesso il sistema lineare omogeneo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad A(t) \in C(\mathbb{R} : \mathbb{C}^n), \quad (1.25)$$

essendo $A(t)$ T -periodica.

Indichiamo con $\Phi(t)$ la matrice fondamentale della (1.25) tale che $\Phi(0) = I$. In particolare, $\Phi(t+T)$ è di nuovo una matrice fondamentale. Quindi, dalla struttura dello spazio delle soluzioni di (1.25) (isomorfo allo spazio \mathbb{C}^n) si conclude che esiste una matrice C non singolare (cioè $\det\{C\} \neq 0$) tale che

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.26)$$

Inoltre, dalla definizione di

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = I, \quad (1.27)$$

otteniamo il seguente teorema.

Teorema 1.7.1 (Floquet). Esistono una matrice T -periodica $P(t)$ e una matrice costante B tali che

$$\Phi(t) = P(t)e^{tB}, \quad (1.28)$$

dove la matrice B soddisfa

$$e^{TB} = C. \quad (1.29)$$

Infine, se $x(t) = P(t)y(t)$, la $y(t)$ soddisfa

$$\dot{y}(t) = By(t). \quad (1.30)$$

Dimostrazione. Ogni matrice non singolare può essere scritta come l'esponenziale di un'altra matrice: $C = e^{TB}$. Ciò è facile da dimostrare se la matrice C è diagonalizzabile: $C = S^{-1}\Lambda S$, dove $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. In tal caso

$$B = \frac{1}{T} S^{-1} \text{diag}(\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_n) S.$$

Lasciamo perdere la dimostrazione nel caso in cui C non è diagonalizzabile.

Per quanto riguarda la T -periodicità di $P(t) := \Phi(t)e^{-tB}$, basta osservare che tenendo conto di (1.26) e (1.29), si ha

$$\begin{aligned} P(t+T) &= \Phi(t+T)e^{-(t+T)B} \\ &= \Phi(t)Ce^{-TB}e^{-tB} \\ &= \Phi(t)CC^{-1}e^{-tB} \\ &= \Phi(t)e^{-tB} = P(t). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \dot{\Phi}(t)e^{-tB} + \Phi(t)e^{-tB}(-B) \\ &= A(t)\Phi(t)e^{-tB} - P(t)B \\ &= A(t)P(t) - P(t)B \end{aligned} \tag{1.32}$$

e, poi, da $x(t) = P(t)y(t)$ e (1.25) si ha

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{P}(t)y(t) + P(t)\dot{y}(t) \\ &= [A(t)P(t) - P(t)B]y(t) + P(t)\dot{y}(t) \\ &= A(t)x(t) + P(t)\{-By(t) + \dot{y}(t)\}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Quindi, dall'equazione $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ segue

$$\dot{y}(t) = P(t)^{-1}(AP(t) - \dot{P}(t))y(t) = By(t). \tag{1.34}$$

Il teorema di Floquet è dimostrato. ■

La matrice $C = e^{TB}$ si chiama la *matrice di monodromia* oppure *fattore di Bloch*. Gli autovalori ρ di C si chiamano moltiplicatori caratteristici, mentre gli autovalori λ di B , $\rho = e^{T\lambda}$, si chiamano esponenti caratteristici.

Esercizio 1.5. Sia $A(t) = p(t)A$, dove A è una matrice costante e $p(t)$ è una funzione scalare continua e T -periodica: Calcolare esplicitamente $\Phi(t)$, $P(t)$, C ecc.

Un'applicazione importante riguarda l'equazione di Helmholtz-Schrödinger

$$-\psi''(x, \lambda) + Q(x)\psi(x, \lambda) = \lambda n(x)^2\psi(x, \lambda), \tag{1.35}$$

dove λ è un parametro spettrale e Q, n sono funzioni periodiche:

$$Q(x+T) \equiv Q(x) \text{ reale}, \quad n(x+T) \equiv n(x) \text{ positiva.}$$

Nel caso $n(x) \equiv 1$ la (1.35) si riduce all'equazione di Hill (oppure di Schrödinger con potenziale periodico) rilevante ai semiconduttori unidimensionali senza impurità. Nel caso $Q(x) \equiv 0$ risulta l'equazione di Helmholtz con indice di rifrazione periodica rilevante ai cristalli fotonici unidimensionali senza impurità.

Convertendo la (1.35) in un sistema del primo ordine otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \psi(x, \lambda) \\ \psi'(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q(x) - \lambda n(x)^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(x, \lambda) \\ \psi'(x, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Siano ora $\theta(x, \lambda)$ e $\varphi(x, \lambda)$ le soluzioni della (1.35) che soddisfano le condizioni iniziali

$$\begin{cases} \theta(0, \lambda) = 1, & \theta'(0, \lambda) = 0, \\ \varphi(0, \lambda) = 0, & \varphi'(0, \lambda) = 1. \end{cases}$$

Allora la matrice fondamentale $\Phi(x, \lambda)$ della (1.36) [con condizione iniziale $\Phi(0, \lambda) = I$] ha la forma

$$\Phi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \theta(x, \lambda) & \varphi(x, \lambda) \\ \theta'(x, \lambda) & \varphi'(x, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Utilizzando il teorema 1.1.5 risulta $\det \Phi(x, \lambda) \equiv 1$. Quindi vale il teorema 1.7.1, dove

$$C = \Phi(T, \lambda) = \begin{pmatrix} \theta(T, \lambda) & \varphi(T, \lambda) \\ \theta'(T, \lambda) & \varphi'(T, \lambda) \end{pmatrix},$$

$$P(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda)\Phi(T, \lambda)^{-1}.$$

Capitolo 2

Studio qualitativo dei sistemi non lineari

In questo capitolo studiamo in modo qualitativo i sistemi non lineari, sia i sistemi di equazioni differenziali che quelli di equazioni alle differenze.

2.1 Studio qualitativo per sistemi sul piano

Consideriamo

$$\ddot{x}(t) = F(x(t), \dot{x}(t)), \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0 \quad (2.1)$$

dove $F(x, y) \in C^1(\Omega)$, essendo Ω un aperto in \mathbb{R}^2 . Lo schema per ridurre l'ordine è seguente. Se $\dot{x}(t) \neq 0$ per $t \in I$, allora potremmo introdurre una nuova variabile $x = x(t)$ e se $t = t(x)$ è la funzione inversa, poniamo:

$$p(x) := \dot{x}(t(x)). \quad (2.2)$$

Dalla regola per la derivazione di una funzione composta avremo

$$\ddot{x}(t(x)) = p(x)p'(x) \quad (2.3)$$

e quindi la (2.1) diventa

$$p(x)p'(x) = F(x, p(x)), \quad p(x_0) = y_0. \quad (2.4)$$

In modo analogo l'equazione

$$x^{(k)}(t) = F(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(k-1)}(t)) \quad (2.5)$$

si può ridurre su una equazione di ordine $k - 1$ usando la stessa trasformazione. Come esercizio potete esprimere $x^{(3)}(t)$ come funzione di $p(x)$, $p'(x)$ e $p''(x)$.

Esercizio 2.1. Risolvere le equazioni:

1) $y^3 y'' + 1 = 0$;

2) $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$;

3) $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$;

4) $y'' = e^y$.

Ecco alcune soluzioni:

1) Ponendo $y' = p(y)$ si ha $y^3 p' p + 1 = 0$, quindi $(p^2)' = -2y^{-3}$ e $p = y' = \pm \sqrt{C_1 + y^{-2}}$. Infine risolviamo le equazioni a variabili separabili $y' = \pm \frac{y}{\sqrt{1 + C_1 y^2}}$ nei casi: $C_1 > 0$, $C_1 = 0$ e $C_1 < 0$.

4) Ponendo $y' = p(y)$ si ha $p' p = e^y$, quindi $p = y' = \pm \sqrt{C_1 + e^y}$ ecc.

Le applicazioni più importanti riguardano lo studio delle equazioni che rappresentano la legge di Newton) con leggi di conservazione

$$\ddot{x}(t) = -U'(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0 \quad (2.6)$$

dove $U(x) \in C^2$ è l'energia potenziale. Possiamo scrivere come un sistema autonomo:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -U'(x) \quad (2.7)$$

Osserviamo che ogni soluzione $(x(t), y(t))$ soddisfa

$$E(x(t), y(t)) \equiv c = E(x(0), y(0)) \quad (2.8)$$

dove $E(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$ è un primo integrale per la (2.7). Quindi, almeno localmente, ogni traiettoria coincide con l'insieme

$$\{(x, y) : E(x, y) = c\}, \quad \text{per una certa costante } c. \quad (2.9)$$

Dal punto di vista delle applicazioni prendiamo $y_0 = 0$ (la velocità iniziale è zero).

Fissiamo ora due numeri reali $a < b$ e supponiamo che

$$U(a) = U(b); \quad U(x) < U(a) \text{ per } x \in]a, b[\quad (2.10)$$

e consideriamo

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -U'(x), \quad x(0) = a, \quad y(0) = 0. \quad (2.11)$$

Teorema 2.1.1. Sia $U'(a) \neq 0$ e $U'(b) \neq 0$. Allora la soluzione della (2.11) è periodica con periodo $T > 0$ (quindi la sua traiettoria (orbita) è chiusa). Il periodo T si esprime dalla formula

$$T = \sqrt{2} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{U(a) - U(\eta)}} d\eta \quad (2.12)$$

Osserviamo che esiste un'unica traiettoria chiusa che passa per i punti $(a, 0)$ e $(b, 0)$ ma infinite soluzioni con una tale orbita.

Dimostrazione. Ci sono due momenti principali. Primo, se la coppia di funzioni $(x(t), y(t))$, dove $y(t) = x'(t)$, soddisfa il sistema, allora

$$\frac{y^2(t)}{2} + U(x(t)) = U(a). \quad (2.13)$$

Quindi, necessariamente $\dot{x}(t) = \pm \sqrt{2(U(a) - U(x(t)))}$ e sono definite (per $|t|$ piccolo) dalle formule

$$\int_c^{x_{\pm}(t)} \frac{1}{\sqrt{2(U(a) - U(\eta))}} d\eta = \pm t, \quad \text{con } c = U(a) \quad (2.14)$$

Osserviamo che dalle condizione $U'(a) \neq 0$, $U'(b) \neq 0$ l'integrale in (2.14) è convergente per $\eta \rightarrow a$ e $\eta \rightarrow b$. Si nota che $x_+(\frac{T}{2}) = b$, $x_-(\frac{T}{2}) = b$, essendo T definito dalla (2.12). Ponendo $\varphi(t) = x_+(t)$ per $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$, $\varphi(t) = x_+(t)$ per $-\frac{T}{2} \leq t \leq 0$ si verifica facilmente che $x(t) = \varphi(t)$, $y(t) = \dot{\varphi}(t)$ è soluzione T periodica ricercata. ■

Teorema 2.1.2. Sia $U'(a) \neq 0$ e $U'(b) = 0$. Allora la soluzione della (2.11) soddisfa

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (x(t), y(t)) = (b, 0).$$

Inoltre, Esiste un'unica traiettoria che passa per il punto $(a, 0)$ e tende asintoticamente a $(b, 0)$, sia per $t \rightarrow +\infty$ sia per $t \rightarrow -\infty$, ma infinite soluzioni con una tale orbita.

Una tale orbita (traiettoria) si chiama *omoclina*.

Dimostrazione. Definiamo $x_{\pm}(t)$ dalla (2.14). A differenza della situazione del teorema precedente abbiamo la seguente situazione: dalla condizione $U'(a) \neq 0$ segue che l'integrale nella (2.14) è convergente per $\eta \rightarrow a$, mentre dalla condizione $U'(b) = 0$ segue che l'integrale nella (2.14) è divergente per $\eta \rightarrow b$. Ciò implica $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x_{\pm}(t) = b$. Le traiettorie ricercate sono definite da $(x_{\pm}(t), \dot{x}_{\pm}(t))$. ■

Teorema 2.1.3. Sia $U'(a) = 0$ e $U'(b) = 0$. Allora esistono due soluzioni $(x_{\pm}(t), y_{\pm}(t))$ del sistema (2.11) tali che

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (x_{\pm}(t), y_{\pm}(t)) = (b, 0) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (x_{\mp}(t), y_{\mp}(t)) = (a, 0).$$

Tali soluzioni si chiamano *eterocliniche*.

Dimostrazione. Per ogni $c \in]a, b[$ definiamo $x_{\pm}^c(t)$ dalla (2.14). A differenza della situazione dei teoremi precedenti, dalle condizioni $U'(a) = U'(b) = 0$ segue che l'integrale nella (2.14) è divergente per $\eta \rightarrow a$ e per $\eta \rightarrow b$. Ciò implica $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x_{\pm}^c(t) = b$, $\lim_{t \rightarrow \mp\infty} x_{\pm}^c(t) = a$. Le traiettorie ricercate sono definite da $(x_{\pm}^c(t), \dot{x}_{\pm}^c(t))$. ■

Esercizio 2.2. Studiare il sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -U'(x), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,$$

dove

- 1) $U(x) = -\cos x$; disegnare la soluzione anche nello spazio $\mathbf{R}_{x,y,t}^3$.
- 2) $U(x) = x \sin x$;
- 3) $U(x) = (x - 1) \sin x$;
- 4) $U(x) = -\cos x + \frac{x}{2}$; disegnare la soluzione anche nello spazio $\mathbf{R}_{x,y,t}^3$.
- 5) $U(x) = \cos x + 2x$; disegnare la soluzione anche nello spazio $\mathbf{R}_{x,y,t}^3$.
- 6) $U(x) = \cos x + x$; disegnare la soluzione anche nello spazio $\mathbf{R}_{x,y,t}^3$.
- 7) $U(x) = \sin x^2$;
- 8) $U(x) = \pm x^2$;
- 9) $U(x) = x^3 \pm x$;
- 10) $U(x) = x^3$;
- 11) $U(x) = x^4 \pm 2x^2$;
- 12) $U(x) = x^4$;
- 13) $U(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \sin \frac{1}{|x|}$.

Nei casi successivi la funzione potenziale dipende da un parametro λ .

$$14) U(x) = \frac{x^3}{3} + \lambda x;$$

$$15) U(x) = \pm \frac{x^4}{4} + \lambda \frac{x^2}{2};$$

$$16) U(x) = -\cos x + \lambda x;$$

$$17) U(x) = (x - 1) \sin x + \lambda x^2;$$

$$18) U(x) = (x - \pi) \sin x + \lambda x^2;$$

$$19) U(x) = \frac{\sin^2 x}{2} + \lambda \cos x;$$

2.2 Punti fissi e loro applicazioni

1. Definizione di un punto fisso di una funzione di una variabile reale a valori reali: Sia $f : I \mapsto I$. Allora $\hat{x} \in I$ si chiama *punto fisso* della f se vale

$$\hat{x} = f(\hat{x}). \quad (2.15)$$

Significato geometrico: l'intersezione della retta $y = x$ con il grafico Γ_f della funzione $y = f(x)$.

Legami tra punti fissi e zeri di funzioni: l'idea della linearizzazione tramite la formula di Taylor. Supponiamo che il problema iniziale sia quello di studiare

$$f(x) = 0, \quad x \in I. \quad (2.16)$$

Se x_0 è vicino ad un zero \hat{x} di f e se $f \in C^1(I)$, con $f'(x_0) \neq 0$. Dalla formula di Taylor (nel punto x_0) si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x), \quad (2.17)$$

e la (2.16) equivale a

$$x = g(x) = x_0 - \frac{R(x) + f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (2.18)$$

2. Modelli discreti: Nelle applicazioni numeriche si passa spesso dai modelli continui ai modelli discreti. Per esempio, consideriamo un'equazione differenziale ordinaria del tipo

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad f \in C(\mathbb{R} : \mathbb{R}), \quad (2.19)$$

che rappresenta varie modelli ($f(z) = (\lambda - \mu)z$, essendo $\lambda, \mu > 0$ nel modello di Malthus per la dinamica della popolazione, o il decadimento di particelle; $f(z) = az - bz^2$ un modello di Verhulst, anche nella cinetica chimica; $f(z) = \sin z$, un modello legato alle cosiddette onde viaggianti *traveling waves* o *solitary waves*). Ricordiamo che i zeri della f rappresentano i *punti di equilibrio* o *punti stazionari*. Uno dei problemi più importanti riguarda la stabilità (asintotica), cioè se vale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \xi, \text{ dove } \xi \text{ è un punto stazionario } (f(\xi) = 0) \quad (2.20)$$

per ogni soluzione $x(t)$ con il punto iniziale *vicino* ξ . Se approssimiamo $x(t)$ nei punti $t = nh$, $n = 0, 1, \dots$ essendo $h > 0$, allora la (2.19) può essere riscritto come

$$\frac{x((n+1)h) - x(nh)}{h} = f(x(nh)), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.21)$$

e ponendo $x_n := x(nh)$, $n = 0, 1, \dots$, e $h = 1$, si ottiene il variante discreto della (2.19)

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.22)$$

Sia $f \in C(I : I)$ (cioè $f : I \mapsto I$ sia una funzione continua), essendo $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Allora, dato $x_0 \in I$ la ricorrenza

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.23)$$

definisce correttamente (poichè $f(I) \subset I$) una successione.

Si ha

Proposizione 2.2.1. Se la successione definita dalla formula ricorsiva (2.23) convergente con limite \hat{x} allora

$$\hat{x} = f(\hat{x}). \quad (2.24)$$

Dimostrazione. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \hat{x}$ ne segue che $\hat{x} \in I = [a, b]$ (perchè?) e dalla (2.23) e la continuità di f otteniamo

$$\hat{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\hat{x}). \quad (2.25)$$

■

Teorema 2.2.1. Sia $f : I \mapsto I$ una funzione continua e crescente¹, dotata di un unico punto fisso \hat{x} . Allora, per ogni $x_0 \in I$, la successione definita dalla (2.23) converge a \hat{x} .

Dimostrazione. Se $x_0 = \hat{x}$, la successione di ricorrenza diventa stazionaria $x_n = \hat{x}$, $n \in \mathbb{N}$, ed quindi la tesi è dimostrata.

Supponiamo che $x_1 = f(x_0) < x_0$. Dimostriamo per induzione che

$$x_n \geq x_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.26)$$

Intanto, la (2.26) è verificata per $n = 0$ dall'ipotesi. Se $x_n \geq x_{n+1}$, utilizzando il fatto che f è crescente, abbiamo:

$$x_{n+1} = f(x_n) \geq f(x_{n+1}) = x_{n+2}. \quad (2.27)$$

Dunque la successione è decrescente. In modo analogo si verifica che se $x_1 > x_0$, la successione è crescente.

Comunque, in tutti i casi la successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è convergente, e dalla (2.25) si ha la tesi. ■

Una funzione $f : I \mapsto I$ si chiama *contrazione* se la f è Lipschitziana con costante di Lipschitz $L < 1$, cioè se esiste una costante $L < 1$ tale che

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leq L|\xi - \eta|, \quad \xi, \eta \in I.$$

Una condizione sufficiente affinché una funzione $f : I \mapsto I$, derivabile in \dot{I} sia una contrazione, è

$$\sup_{x \in \dot{I}} |f'(x)| < 1. \quad (2.28)$$

Dimostriamo la seguente versione del teorema del punto fisso:

Teorema 2.2.2. Sia $f : I \mapsto I$ una contrazione. Allora f ammette uno e solo uno punto fisso \hat{x} . Inoltre, per ogni $x_0 \in I$ la successione definita dalla (2.23) converge a \hat{x} .

Dimostrazione. L'unicità segue dal fatto che se $\xi = f(\xi)$ e $\eta = f(\eta)$, allora

$$|\xi - \eta| = |f(\xi) - f(\eta)| \leq L|\xi - \eta|. \quad (2.29)$$

Non può verificarsi $\xi \neq \eta$ poichè sarebbe assurdo ($1 < L < 1!$). Quindi esiste al massimo un punto fisso.

¹Osservazione: Qualche volta, seguendo la terminologia in inglese, si usa il termine non-decrescente (cioè $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$), mentre per crescente si intende strettamente crescente.

Scegliamo e fissiamo $x_0 \in I$. Osserviamo che la successione definita dalla ricorrenza soddisfa

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq L|x_n - x_{n-1}|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.30)$$

da cui segue, per induzione, che

$$|x_{n+1} - x_n| = L^n |x_1 - x_0| = L^n |f(x_0) - x_0|, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.31)$$

Prendiamo $n, p \in \mathbb{N}$. Dalla (2.31) si ha,

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + \dots + x_{n+1} - x_n| \\ &= \left| \sum_{j=1}^p x_{n+j} - x_{n+j-1} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^p |x_{n+j} - x_{n+j-1}| \\ &\leq \sum_{j=1}^p L^{n+j-1} |x_1 - x_0| \\ &= L^n |f(x_0) - x_0| \sum_{j=1}^p L^{j-1} \leq L^n |f(x_0) - x_0| \sum_{s=0}^{\infty} L^s \\ &= L^n \frac{|f(x_0) - x_0|}{1-L} = \frac{|f(x_0) - x_0|}{1-L} \exp(-n \ln \frac{1}{L}). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Quindi, prendendo $\varepsilon > 0$, se $f(x_0) \neq x_0$, ponendo

$$n_\varepsilon = \max\left\{0, \ln \frac{1-L}{\varepsilon |f(x_0) - x_0|}\right\}, \quad (2.33)$$

si ha

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \quad n > n_\varepsilon, p \in \mathbb{N}. \quad (2.34)$$

cioè, la successione x_n , $n \in \mathbb{N}$, è una successione di Cauchy e quindi è convergente. ■

Osservazioni 2.1. Dalla disuguaglianza (2.33) si ottiene, per $p \rightarrow \infty$, ponendo $\delta_0 = \ln(1/L) > 0$ (poichè $1/L > 1$),

$$|\hat{x} - x_n| \leq \frac{|f(x_0) - x_0|}{1-L} \exp(-\delta_0 n), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.35)$$

che può essere vista come una stima della rapidità della convergenza del metodo, cioè dopo n approssimazioni la differenza tra la soluzione vera e la soluzione approssimativa x_n .

Consideriamo la successione (2.23) nel caso in cui la f ammette più di un punto fisso.

Definizione 2.2.1. Un punto fisso α della f si chiama *attrattivo per f* (o *attrattore per f*) se esiste un intorno U di α tale che per ogni $x_0 \in U$ la successione di ricorrenza x_n , $n \in \mathbb{N}$ (definita dalla (2.23)) converga a α . Si chiama il bacino di attrazione del punto fisso α l'insieme dei punti $x_0 \in I$ per cui la successione definita dalla (2.23) converge a α .

Un punto fisso α della f si chiama *repulsivo per f* (o *repulsore per f*) se esiste un intorno U di α tale che per ogni $x_0 \in U \setminus \{\alpha\}$ la successione di ricorrenza x_n , $n \in \mathbb{N}$ (definita dalla (2.23)) esca da U e non torna mai in U , cioè $\exists n_0 = n_0(U) \in \mathbb{N}$ t.c. $x_n \notin U$ per $n \geq n_0$.

Teorema 2.2.3. Sia $f : I \mapsto I$ una funzione continua e crescente che ammette tre punti fissi consecutivi $x_1 < x_2 < x_3$. Supponiamo che

$$f(x) > x \text{ per } x_1 < x < x_2 \quad (2.36a)$$

$$f(x) < x \text{ per } x_2 < x < x_3 \quad (2.36b)$$

Allora x_2 è un punto fisso attrattivo per f in $U = (x_1, x)$, e $U = (x_2, x_3)$ è bacino di attrazione di x_2 .

Dimostrazione. Sia $x_0 \in (x_3, x_2)$. Poichè $f \nearrow$ si ha

$$x_0 \leq x \leq x_2 \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_2). \quad (2.37)$$

D'altra parte, $f(x_2) = x_2$, mentre la (2.36a) implica $x_0 < f(x_0)$. Quindi $f([x_0, x_2]) = [x_0, x_2]$. Applichiamo ora il teorema 2.2.2 nell'intervallo $I = [x_0, x_2]$. In modo analogo si considera il caso $x_0 \in (x_2, x_3)$. ■

Teorema 2.2.4. Supponiamo che $f : I \mapsto \mathbb{R}$ abbia un punto fisso $\xi \in \dot{I}$ e che sia derivabile in ξ . Si ha:

i) se $|f'(\xi)| < 1$ allora ξ è un punto fisso attrattivo.

ii) se $0 < |f'(\xi)| < 1$, scegliendo comunque α, β con $0 < \alpha < |f'(\xi)| < \beta < 1$ e x_0 nel bacino di attrazione della ξ ne segue che

$$\alpha|x_n - \xi| \leq |x_{n+1} - \xi| \leq \beta|x_n - \xi|, \quad (2.38)$$

e quindi

$$|x_n - \xi| = O(\beta^n), \quad \alpha^n = o(|x_n - \xi|), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.39)$$

iii) se $|f'(\xi)| = 0$, risulta

$$|x_n - \xi| = o(\beta^n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.40)$$

per ogni $\beta > 0$.

iv) se $|f'(\xi)| > 1$, allora ξ è un punto repulsivo.

Dimostrazione. Osserviamo che da $f(\xi) = \xi$, si abbia

$$x_{n+1} - \xi = f(x_n) - f(\xi) = \frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi}(x_n - \xi). \quad (2.41)$$

Se $0 < \alpha < |f'(\xi)| < \beta < 1$, dalla definizione della derivata e dalla (2.41) ne segue che $\exists \delta > 0$ tale che

$$\alpha < \left| \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \right| < \beta \text{ per } |x - \xi| < \delta, \quad x \in I, \quad (2.42)$$

e quindi,

$$\alpha|x_n - \xi| \leq |x_{n+1} - \xi| \leq \beta|x_n - \xi|. \quad (2.43)$$

Usando l'induzione, si ottiene

$$\alpha^n|x_0 - \xi| \leq |x_n - \xi| \leq \beta^n|x_0 - \xi| \quad (2.44)$$

che implica i), ii). Se $f'(\xi) = 0$, la tesi di iii) segue dal fatto che $\forall \beta > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che

$$\left| \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \right| < \beta \text{ per } |x - \xi| < \delta, \quad x \in I. \quad (2.45)$$

la dimostrazione è finita. ■

Per l'esistenza di almeno un punto fisso non è necessario che f sia contrazione.

Teorema 2.2.5 (Schauder). Sia $f : [a, b] \mapsto [a, b]$ una funzione continua. Allora f ammette almeno un punto fisso.

Dimostrazione. Basta applicare il teorema degli zeri per la funzione $f(x) - x$ nell'intervallo $[a, b]$. Infatti, supponiamo che la f non abbia alcun punto fisso. In tal caso $a < f(a) \leq b$ e $a \leq f(b) < b$. Quindi la funzione continua $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ definita da $g(x) = f(x) - x$ verifica $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$. Dal teorema degli zeri segue l'esistenza di $x_0 \in]a, b[$ per cui $g(x_0) = 0$. In tal caso $f(x_0) = x_0$ e x_0 è un punto fisso della f , contraddicendo l'ipotesi della non esistenza dei punti fissi. Quindi la f ha almeno un punto fisso. ■

Esercizio 2.3. Studiare la successione $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ al variare $x_0 \in I$, dove $f \in C(I : I)$ (usando, per esempio, lo schema: a) trovare i punti fissi della f ; b) studiare la convergenza per x_0 appartenente a diversi intervalli con punti fissi e/o $\pm\infty$ come i suoi estremi; c) studiare il tipo dei punti fissi (attraattivi o repulsivi).

- a) $f(x) = (1 + r)x$, $I = [0, +\infty)$, $x_0 \in [0, +\infty)$, essendo $r \in \mathbb{R}$; *Soluzione:* Ponendo $R = 1 + r$ si ha $x_{n+1} = Rx_n$, quindi usando l'induzione, otteniamo $x_n = R^n x_0$, e la conclusioni dipendono da r . Evidentemente, il modello non vale per tutti gli ambienti.
- b) $f(x) = ax(b - x)$, essendo $a, b > 0$, $I = \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
- c) $f(x) = \sqrt{(x + 1)/2}$, $I = [0, 2]$, $x_0 = 2$; È facoltativo: studiare il caso generale $I = [0, +\infty)$, $x_0 \in I$.
- d) $f(x) = x + \sin x$, $I = [-2\pi, 2\pi]$, $x_0 = 1$; È facoltativo analizzare il caso generale $I = \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

Capitolo 3

Equazioni differenziali di Clairaut e di Lagrange

Nello studio della meccanica si incontrano spesso equazioni differenziali non lineari che risultano di rilevante interesse nell'analisi delle singolarità e che possiamo, dunque, inglobare nella teoria delle singolarità di Whitney. Tra queste vi sono *le equazioni di Clairaut e le equazioni di Lagrange-D'Alembert*.

3.1 Equazioni di Clairaut

Le equazioni di Clairaut¹ sono del seguente tipo:

$$y = xy' + \psi(y'), \quad (3.1)$$

dove ψ è una funzione derivabile in \mathbb{R} . A questo tipo di equazione si perviene quando si vuole determinare una curva a partire da una proprietà che coinvolge le sue rette tangenti, ma non i punti di contatto. Infatti, considerando un punto, (x, y) , sulla curva e y' la pendenza della tangente, questa presenta la seguente equazione:

$$\xi = y + y'(\eta - x) = y'\eta + y - xy'. \quad (3.2)$$

Una proprietà della tangente si esprime, dunque, come una relazione tra i termini y' e $y - xy'$, come nell'equazione di Clairaut.

Per integrare tale equazione, poniamo $y' = p$ e deriviamo entrambi i membri rispetto a x , ottenendo:

$$y' = y' + xy'' + \psi'(y')y'' \rightsquigarrow p = p + xp' + \psi'(p)p',$$

¹Alexis Clairaut (1713-1765). Pubblicazione sull'equazione: 1736.

$$p'[x + \psi'(p)] = 0,$$

le cui soluzioni sono: $p' = 0$ e $x = -\psi'(p)$. Se $p' = 0$, allora p è una costante, c , che, sostituita nell'equazione di partenza, permette di ottenere una famiglia di rette:

$$y = cx + \psi(c), \quad c \in \mathbb{R},$$

che costituisce l'insieme delle soluzioni generali. Una seconda soluzione si ottiene in modo implicito, ponendo $x = -\psi'(p)$ ed ottenendo:

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p). \end{cases} \quad (3.3)$$

La (3.3) consente di rappresentare l'involuppo della famiglia di rette, $y = cx + \psi(c)$, dove per involuppo di una famiglia di rette si intende una curva tangente, in ogni suo punto non singolare, ad una retta della famiglia.

Più precisamente, vale il seguente teorema:

Teorema 3.1.1. Sia data l'equazione di Clairaut (3.3) con $\psi \in C^2(\mathbb{R})$. Supponiamo che $\psi''(p) \neq 0$ per ogni $p \in \mathbb{R}$. Allora la (3.3) definisce una soluzione dell'equazione di Clairaut (3.1):

$$y = z(x), \quad x \in (\alpha, \beta), \quad (3.4)$$

dove

$$\alpha = \inf_{p \in \mathbb{R}} [-\psi'(p)], \quad \beta = \sup_{p \in \mathbb{R}} [-\psi'(p)], \quad (3.5)$$

che è l'involuppo della famiglia di rette $y = cx + \psi(c)$, con $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Osserviamo che poiché ψ'' è continua, possono aversi i due seguenti casi:

i) $\psi''(p) > 0$ per ogni $p \in \mathbb{R}$,

ii) $\psi''(p) < 0$ per ogni $p \in \mathbb{R}$.

Quindi risulta che $\psi'(p)$ è strettamente crescente se $\psi'' > 0$, oppure $\psi'(p)$ è strettamente decrescente se $\psi'' < 0$. In entrambi i casi $-\psi'$ è invertibile. Indichiamo con $\kappa(x)$ l'inversa di $-\psi'(p)$ e sostituiamo p con $\kappa(x)$ nella seconda equazione di (3.3), lasciando variare x nell'intervallo (α, β) . Otteniamo:

$$\zeta(x) = x\kappa(x) + \psi(-\kappa(x)). \quad (3.6)$$

Dall'identità $\zeta'(x) = y'(p)/x'(p)$ e dalla relazione $p = \kappa(x)$, si verifica che $y = \zeta(x)$ è una soluzione dell'equazione di Clairaut (3.3). Dimostriamo che il grafico Γ_ζ della funzione $y = \zeta(x)$ rappresenta una curva involuppo della famiglia di rette:

$$y = cx + \psi(c),$$

dove $c \in \mathbb{R}$. Le intersezioni della curva con le rette si determinano con la condizione:

$$y(p) = cx(p) + \psi(c),$$

ovvero:

$$-p\psi'(p) + \psi(p) = -c\psi'(p) + \psi(c),$$

da cui risulta che $p = c$ è una soluzione. In corrispondenza, il punto di intersezione ha coordinate:

$$(x_0, y_0) = (-\psi'(c), -c\psi'(c) + \psi(c)).$$

La retta tangente alla curva (3.4) ha la direzione del vettore:

$$(x'(p), y'(p)) = (-\psi''(p), -p\psi''(p)),$$

che, se $\psi''(p) \neq 0$, è la direzione del vettore $(1, c)$, con $p = c$. Perciò l'equazione della retta tangente, per $p = c$, è:

$$y = y_0 + c(x - x_0) = -c\psi'(c) + \psi(c) + c(x - \psi'(c)) = cx + \psi(c).$$

■

Esempio 3.1. Determiniamo le soluzioni dell'equazione:

$$y = xy' + (y')^2.$$

Si tratta di un'equazione di Clairaut.

Ponendo $y' = p$, risulta che $\psi(p) = p^2$. Derivando entrambi i membri dell'equazione, otteniamo:

$$p = p + xp' + 2pp',$$

ovvero:

$$p'(x + 2p) = 0,$$

da cui si ottiene che $p' = 0$ e $x = -2p$. La prima soluzione significa che p è una costante, $c \in \mathbb{R}$, che, sostituita nell'equazione di partenza, individua la famiglia di rette:

$$y = cx + c^2.$$

Osservato che $\psi''(p) = 2 > 0$, la seconda soluzione, $x = -2p$, consente di rappresentare parametricamente il sistema:

$$\begin{cases} x = -2p, \\ y = -p^2, \end{cases}$$

che costituisce l'involuppo della famiglia di rette, $y = cx + c^2$, e da cui si ottiene $y = -(x^2/4)$.

Esempio 3.2. Determiniamo le soluzioni dell'equazione:

$$y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2.$$

Si tratta di un'equazione di Clairaut, dove $\psi(p) = -(p^2/4)$.

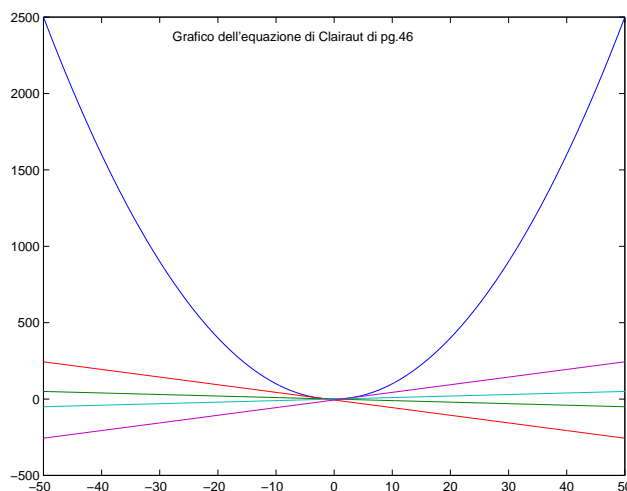


Figura 3.1: Soluzioni dell'equazione di Clairaut.

L'insieme delle soluzioni è costituito dalla famiglia di rette, $y = cx - (c^2/4)$, al variare di $c \in \mathbb{R}$, e dall'integrale singolare di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(p) = -\psi'(p) = \frac{1}{2}p, \\ y(p) = -p\psi'(p) + \psi(p) = \frac{1}{4}p^2. \end{cases}$$

Poiché $p = 2x$, si ottiene $y = \frac{1}{4}(2x)^2 = x^2$, e questa è l'equazione cartesiana dell'integrale singolare. La parabola ottenuta è una curva involuppo della famiglia di rette, $y = cx - (c^2/4)$.

Esempio 3.3. Consideriamo le soluzioni dell'equazione di Clairaut (3.1) con $\psi(p) = ap^k$, cioè:

$$y = xy' + a(y')^k,$$

dove $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Osserviamo che se $k \geq 3$ la derivata seconda, $\psi''(p) = ak(k-1)p^{k-2}$, si annulla per $p = 0$, mentre se $a = 0$ l'equazione di Clairaut diventa un'equazione lineare singolare del tipo:

$$xy'(x) - y(x) = 0.$$

Verifichiamo che la curva di equazioni parametriche (3.3), con $\psi(p) = ap^k$, può essere scritta nella seguente forma:

$$y = -a(k-1) \left(-\frac{x}{ak} \right)^{k/(k-1)}, \quad (3.7)$$

nei due seguenti casi:

- i) $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ e k è un numero intero positivo pari;
- ii) $a \neq 0$, $x/a < 0$ e k è un numero intero positivo dispari.

Se $a = 0$, non c'è una soluzione singolare. Quindi l'involuppo della famiglia di rette è data da

$$y = cx + ac^k.$$

Consideriamo l'equazione di Clairaut, ponendo $a = 1$ e $k = 3$, cioè:

$$y = xy' + (y')^3. \quad (3.8)$$

Poniamo $y' = p$. Derivando entrambi i membri dell'equazione rispetto ad x , otteniamo:

$$y' = y' + xy'' + 3(y')^2 y'' \quad \rightsquigarrow \quad p = p + xp' + 3p^2 p',$$

ovvero:

$$p'(x + 3p^2) = 0.$$

La prima soluzione significa che p è una costante, c , che, sostituita nell'equazione di partenza, individua la famiglia di rette:

$$y = cx + c^3.$$

Osservando che $\psi''(p) = 6p$, e che, dunque, non è determinata la convessità e la concavità della funzione $\psi(p)$, dalla seconda soluzione otteniamo il seguente sistema in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = -3p^2, \\ y = -2p^3, \end{cases}$$

da cui risulta che $y = -2 \left(\pm \sqrt{\frac{-x}{3}} \right)^3$, supposto che $x < 0$.

Osservazioni 3.1. Il grafico dell'equazione di quest'ultimo esempio è quella che il matematico americano Hassler Whitney, in un suo articolo pubblicato nel 1955 ed intitolato

On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces: I. Mappings
of the Plane into the Plane,²

definì *cuspidate*. Ponendo le basi per una nuova teoria matematica delle singolarità di mappe lisce (ossia, differenziabili un numero sufficiente di volte, come per esempio un polinomio), egli osservò che in generale esistono solo due tipi di singolarità. Mentre tutte le altre singolarità degli oggetti che ci circondano scompaiono in seguito a piccoli spostamenti del corpo in esame o della direzione di propagazione, questi due tipi sono stabili. Il primo è costituito dalla *piega*, che compare, per esempio, nei punti equatoriali di una sfera proiettata su un piano. La seconda singolarità, definita *cuspidate* da Whitney, è descritta dall'equazione:

$$y_1 = x_1^3 + x_1x_2,$$

rispetto alle coordinate spaziali (x_1, x_2, y_1) , ed è proiettata sul piano orizzontale (x_2, y_1) . La mappa corrispondente in coordinate locali è, dunque, data da

$$y_1 = x_1^3 + x_1x_2, \quad y_2 = x_2.$$

Quindi, Whitney dimostrò che la cuspidate è stabile e che *ogni singolarità di una mappa liscia di una superficie su un piano sviluppa pieghe e cuspidate in seguito ad una piccola perturbazione appropriata.*

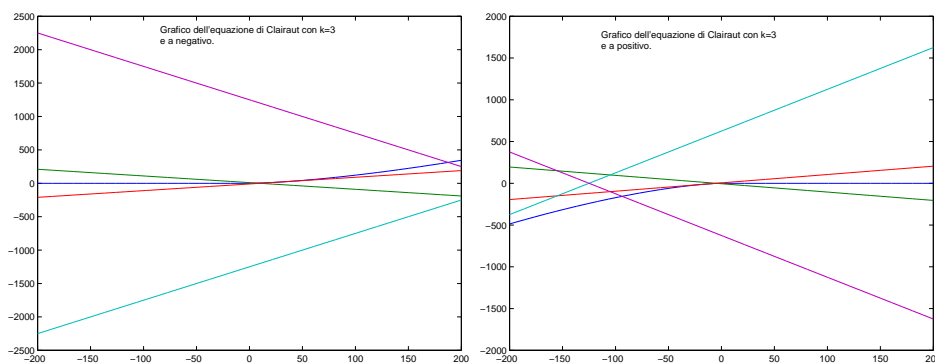


Figura 3.2: Soluzioni dell'equazione di Clairaut per $k = 3$, sia per a negativo e per a positivo.

²Annals of Mathematics (2)**62**, 374–410 (1955).

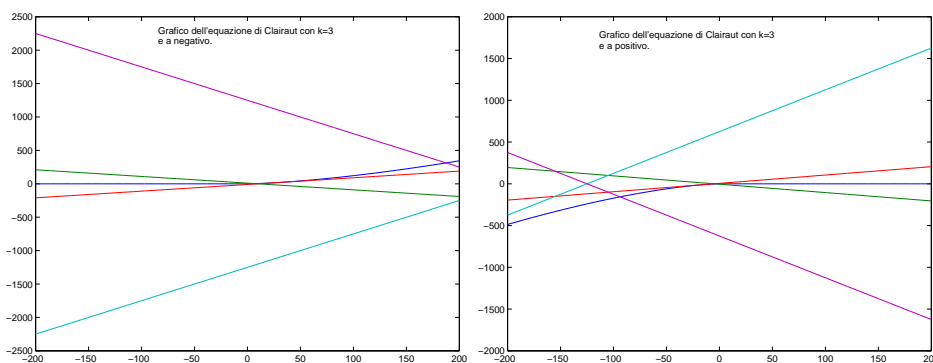


Figura 3.3: Soluzioni dell'equazione di Clairaut per $k = 2$, sia per a negativo e per a positivo.

3.2 Equazioni di Lagrange-D'Alembert

Le seguenti equazioni sono una generalizzazione delle equazioni di Clairaut. Sono del tipo:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

dove φ e ψ sono funzioni derivabili in $I \subseteq \mathbb{R}$.

Ponendo $p = y'$, deriviamo rispetto ad x entrambi i membri dell'equazione:

$$y' = \varphi(y') + x\varphi'(y')y'' + \psi'(y')y'' \rightsquigarrow p = \varphi(p) + x\varphi'(p)p' + \psi'(p)p',$$

$$p'[x\varphi'(p) + \psi'(p)] = p - \varphi(p).$$

Ponendo $p_0 = \varphi(p_0)$, la retta $y = xp_0 + \psi(p_0)$ è integrale dell'equazione di Lagrange (1736-1813). Se $p \neq \varphi(p)$, allora $p' \neq 0$ e p risulta invertibile; se $x = x(p)$ e si ha $x' = \frac{1}{p'}$, sostituito nella precedente espressione, si ottiene:

$$[p - \varphi(p)]x' = x\varphi'(p) + \psi'(p),$$

che è lineare in $x = x(p)$. Se $x = x(p, c)$, questa è l'integrale generale. La soluzione dell'equazione di Lagrange in forma parametrica è data da

$$\begin{cases} x = x(p, c), \\ y = x(p, c)\varphi(p) + \psi(c). \end{cases}$$

Esempio 3.4. Troviamo le soluzioni dell'equazione:

$$y = x(y')^2 + (y')^3.$$

Questa è un'equazione di Lagrange-D'Alembert. Deriviamo rispetto ad x entrambi i membri dell'equazione e poniamo $y' = p$.

$$y' = (y')^2 + 2xy'y'' + 3(y')^2y'' \rightsquigarrow p = p^2 + 2xpp' + 3p^2p',$$

$$p'(2xp + 3p^2) = p - p^2.$$

Per $p - p^2 = 0$, cioè $p(1 - p) = 0$, $p = 0$ e $p = 1$, si hanno le soluzioni particolari:

$$y = 0, \quad y = x + 1.$$

Se $p - p^2 \neq 0$, si ha

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p(1-p)}{p(2x+3p)} \rightsquigarrow \frac{dx}{dp} = \frac{2x+3p}{1-p},$$

cioè:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2}{1-p}x + \frac{3p}{1-p},$$

che è un'equazione lineare, il cui integrale generale è dato da

$$\begin{aligned} x &= e^{\left(\int \frac{2}{1-p} dp\right)} \left\{ c + \int e^{-\left(\int \frac{2}{1-p} dp\right)} \frac{3p}{1-p} dp \right\} \\ &= \frac{1}{(1-p)^2} \left\{ c + \int (1-p)^2 \frac{3p}{(1-p)} dp \right\} = \\ &= \frac{1}{(1-p)^2} \left\{ c + \int 3p dp - \int 3p^2 dp \right\} = \\ &= \frac{1}{(1-p)^2} \left\{ c + \frac{3p^2}{2} - \frac{3p^3}{3} \right\} = \frac{3p^2 - 2p^3 + 2c}{2(1-p)^2}. \end{aligned}$$

La soluzione in forma parametrica è, dunque:

$$\begin{cases} x = \frac{3p^2 - 2p^3 + 2c}{2(1-p)^2}, \\ y = xp^2 + p^3. \end{cases}$$

Capitolo 4

Punti di equilibrio

In questo capitolo si studia la tipologia dei punti di equilibrio dei sistemi dinamici autonomi $y' = f(y)$. In particolare, studiamo in profondità i punti di equilibrio del sistema dinamico $x'(t) = Ax(t)$, dove A è una matrice reale 2×2 non dipendente da t . Infine discutiamo l'oscillatore armonico con attrito.

4.1 Sistema autonomo generalizzato

Consideriamo un sistema autonomo

$$y' = f(y),$$

dove f è localmente lipschitziana¹ in un aperto Ω di \mathbb{R}^n . È possibile analizzare le soluzioni del sistema mediante le loro immagini nello spazio dei vettori y , il cosiddetto spazio delle fasi.

Definizione 4.1.1. Data una curva $t \rightarrow \varphi(t)$, chiamiamo *orbita*, *traiettoria* o *caratteristica* l'immagine di φ .

Essa gode delle seguenti proprietà:

- i) un'orbita corrisponde ad una famiglia di soluzioni del tipo:

$$y(t) = \varphi(t + c),$$

con $c \in \mathbb{R}$, traslate nel tempo. È, dunque, fissata un'orientazione dell'orbita, comune a tutte le soluzioni corrispondenti;

¹ f si dice lipschitziana se $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \text{cost} \cdot |x_1 - x_2|$ per ogni coppia di punti x_1, x_2 . Nel caso di Lipschitzianità locale (al contrario di quella globale) la costante dipende dal sottointervallo in cui si considera la f . Per esempio, le funzioni che hanno una derivata (localmente) limitata.

- ii) due orbite non possono intersecarsi. Lo spazio delle fasi è, pertanto, unione di orbite disgiunte.²

Le traiettorie possono essere di tre tipi:

- a) **punti di equilibrio.** Se $y_0 \in \Omega$ è tale che $f(y_0) = 0$, allora y_0 è detto *punto di equilibrio* (o *punto critico*, *punto singolare*, *punto di equilibrio*) del sistema. Esso rappresenta l'orbita della soluzione costante

$$\varphi(t) = y_0.$$

- b) **cicli** (o curve semplici e chiuse). Si chiamano *cicli* le orbite delle soluzioni periodiche $\varphi = \varphi(t)$, per le quali esiste $T > 0$ tale che

$$\varphi(t + T) = \varphi(t)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

- c) **curve semplici non chiuse.** Si chiamano *curve semplici non chiuse* le orbite delle soluzioni periodiche $\varphi = \varphi(t)$, per le quali non esiste $T > 0$ tale che

$$\varphi(t + T) = \varphi(t)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

4.2 Derivata di Lie e costante del moto

È opportuno introdurre i concetti di derivata lungo una traiettoria del sistema (o derivata di Lie) e di integrale primo o costante del moto.

Definizione 4.2.1. Sia $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dove Ω è un aperto di \mathbb{R}^n , e $E \in C^1(\Omega)$.

- a) La derivata di E lungo le traiettorie del sistema è data da

$$E'(y) = \langle \nabla E(y), f(y) \rangle, \quad y \in \Omega.$$

- b) Se $E'(y) = 0$ per ogni $y \in \Omega$, E si chiama *integrale primo o costante del moto* per il sistema.

²Senza l'ipotesi di Lipschitzianità, le orbite si possono intersecare. Per esempio, per $c \geq t_0$ tutte le funzioni $y(t; c) = \begin{cases} (t - c)^2, & t \geq c, \\ 0, & t \leq c, \end{cases}$ verificano il problema di Cauchy $y' = 2y^{1/2}$, $y(t_0) = 0$.

L'integrale primo gode delle seguenti proprietà:

- i) E è un integrale primo per il sistema se e soltanto se ogni orbita è interamente contenuta in un unico insieme di livello di E o, equivalentemente, se e soltanto se E è costante su ogni soluzione del sistema.
- ii) Se la semi-orbita destra (rispettivamente, sinistra) è contenuta in un compatto, la soluzione è prolungabile a $+\infty$ (rispettivamente, $-\infty$).
E, dunque, se il sistema ammette un integrale primo i cui insiemi di livello sono limitati in \mathbb{R}^n , le soluzioni esistono in tutto \mathbb{R} .

Un esempio tipico proviene dalla meccanica di Newton. Scrivendo l'equazione differenziale

$$y'' = f(y), \quad (4.1)$$

nella forma

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = f(y_1), \end{cases}$$

otteniamo, per ogni zero ξ della funzione Lipschitziana f , un punto di equilibrio $(\xi, 0)$. Si verifica facilmente che

$$E(y_1, y_2) = y_2^2 - \int_0^{y_1} f(\tau) d\tau$$

è una costante del moto. Infatti,

$$\frac{d}{dt} E(y_1(t), y_2(t)) = y_2 y'_2 - f(y_1) y_1 = 0.$$

Le orbite si calcolano moltiplicando la (4.1) da $2y'$ e integrando. Si ottiene

$$(y')^2 - y'(0)^2 = 2 \int_0^y f(\tau) d\tau,$$

il che si converte facilmente nell'equazione differenziale separabile

$$y' = F(y), \quad F(y) = \pm \sqrt{y'(0)^2 + 2 \int_0^y f(\tau) d\tau}.$$

4.3 Classificazione dei punti di equilibrio

Ricordando la teoria delle forme canoniche di Jordan, esposta nel primo capitolo, presentiamo una classificazione dei punti di equilibrio sul piano

con l'aiuto delle forme canoniche di Jordan. A tale scopo, consideriamo un sistema di equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti costanti

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

dove A è una matrice reale di ordine 2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

Seguendo l'analisi di Poincaré, presentiamo una classificazione delle radici caratteristiche di A :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A,$$

dove $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}$ è la traccia della matrice A . Possiamo effettuare una trasformazione lineare non singolare, ponendo

$$x = Ky, \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \det(K) \neq 0,$$

e modificando il sistema di partenza nel seguente:

$$\frac{dy}{dt} = Jy,$$

dove $J = K^{-1}AK$ è la forma canonica di Jordan.

Se le radici di A , λ_1 e λ_2 , sono distinte, allora risulta che

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2$ è una radice doppia di A e A non è un multiplo della matrice d'identità, allora J è data da

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Se, inoltre, le radici caratteristiche, λ_1 e λ_2 , sono reali e distinte, allora tutte le soluzioni reali sono date da

$$y = y_1 + y_2 = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Dunque

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\lambda_2 y_2}{\lambda_1 y_1} = \lambda c e^{\lambda_1(\lambda_2-1)t}, \quad \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad c = \frac{c_2}{c_1}.$$

Partendo da due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione $y' = Ay$, discutiamo ora i grafici della funzione

$$t \mapsto (y_1(t), y_2(t))$$

nei diversi casi. Se λ_1 e λ_2 hanno lo stesso segno, allora ogni traiettoria è di tipo *parabolico* e l'origine è detto *nodo*. In particolare, se λ_1 e λ_2 sono entrambe negative, ogni traiettoria, per $t \rightarrow +\infty$, tende verso l'origine, detto *nodo stabile*. Inoltre, ogni traiettoria risulta essere tangente nell'origine all'asse $y_2 = 0$ nel caso in cui $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$, e all'asse $y_1 = 0$ nel caso in cui $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$. Se λ_1 e λ_2 sono entrambe positive, ogni traiettoria, per $t \rightarrow -\infty$, tende verso l'origine, detto *nodo instabile*. Se λ_1 e λ_2 presentano segni opposti, con $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ e $c_1 c_2 \neq 0$, ogni traiettoria è di tipo *iperbolico*. Le due traiettorie sull'asse $y_1 = 0$ tendono verso l'origine per $t \rightarrow +\infty$, e quelle sull'asse $y_2 = 0$ vi tendono per $t \rightarrow -\infty$. Ogni altra traiettoria tende asintoticamente all'asse $y_2 = 0$ per $t \rightarrow +\infty$. Al crescere di t , ogni punto si muove inizialmente verso l'origine, poi, dopo aver raggiunto una minima distanza, esso si allontana asintoticamente verso l'asse $y_2 = 0$. In questo caso, l'origine è detto *punto di sella*, che è un punto di equilibrio instabile. Se le due radici, λ_1 e λ_2 , sono uguali, allora tutte le soluzioni reali del sistema sono date da

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = c_2 e^{\lambda_1 t},$$

e dunque

$$y_1 = (c + t)y_2, \quad \frac{dy_1}{dy_2} = c + t,$$

dove $c = (c_1/c_2)$. Se $\lambda_1 < 0$, le traiettorie tendono verso l'origine per $t \rightarrow +\infty$, e nell'origine sono tangenti all'asse $y_2 = 0$. Se $\lambda_1 > 0$, si verifica il contrario. In entrambi i casi, l'origine è detto *nodo degenerato*.

Se le radici caratteristiche di A sono complesse coniugate:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta = \rho e^{i\theta}, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta = \rho e^{-i\theta},$$

il sistema di equazioni differenziali diventa

$$\frac{dw}{dt} = R w, \quad R = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

tutte le soluzioni sono date da

$$w_1 = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t - c_2 \sin \beta t), \quad w_2 = e^{\alpha t}(c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t).$$

Nel caso in cui $\alpha = 0$, le traiettorie formano una famiglia di cerchi concentrici con i centri nell'origine. L'origine è detto *centro*. Nel caso in cui $\alpha < 0$, ogni

traiettoria è una spirale che si avvicina all'origine per $t \rightarrow +\infty$, in verso orario se $\beta > 0$, in verso antiorario se $\beta < 0$. L'origine è detto *fuoco stabile*. Se $\alpha < 0$, ogni traiettoria si avvolge su se stessa a spirale, avvicinandosi all'origine per $t \rightarrow -\infty$. L'origine è detto *fuoco instabile*. Supponiamo che $\det(A) = 0$, ovvero che il sistema di partenza sia singolare. Se il rango della matrice A è zero, allora ogni punto è un punto di equilibrio del sistema. Se A ha rango uno, allora tutti i punti di equilibrio, ovvero tutte le soluzioni di $Ax = 0$, giacciono su una linea retta e tutte le traiettorie non singolari appartengono ad una famiglia di rette parallele, ognuna delle quali contiene uno ed un solo punto di equilibrio.

4.4 Oscillatore armonico con attrito

Analizziamo, nel piano delle fasi, l'equazione delle piccole oscillazioni del pendolo con attrito:

$$x'' + kx' + x = 0, \quad k \in \mathbb{R}, k > 0, \quad (4.2)$$

in prossimità della soluzione di equilibrio $x(t) = 0$, $x'(t) = 0$. Il sistema è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - ky. \end{cases}$$

Consideriamo la matrice jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix},$$

dove $\text{tr } A = -k$, $\det A = 1$, $\Delta = (\text{tr } A)^2 - 4 \det A = k^2 - 4$.

Distinguiamo i seguenti casi:

- a. $\Delta < 0$, $0 < k < 2$. L'origine è un fuoco. Il pendolo compie oscillazioni smorzate, avvicinandosi alla posizione di equilibrio, tanto più lentamente quanto più piccolo è il coefficiente d'attrito, k . Poiché $\text{tr } A = -k$ per $0 < k < 2$, il fuoco è asintoticamente stabile. Infatti,

$$x(t) = x(0)e^{-kt/2} \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{4-k^2}\right) + [x'(0) + \frac{k}{2}x(0)]e^{-kt/2} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{4-k^2}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{4-k^2}}.$$

- b. $\Delta = 0$, $k = 2$. L'origine è un nodo ad una tangente (la direzione della tangente è quella della bisettrice del secondo e del quarto quadrante). Infatti,

$$x(t) = e^{-2t} \{x(0) + [x'(0) + 2x(0)]t\}.$$

c. $\Delta > 0$, $k > 2$. L'origine è un nodo asintoticamente stabile a due tangenti. Se il coefficiente d'attrito è sufficientemente grande, il pendolo non compie oscillazioni smorzate, ma va direttamente alla posizione di equilibrio. Infatti,

$$x(t) = x(0)e^{-kt/2} \cosh\left(\frac{t}{2}\sqrt{k^2 - 4}\right) + \left[x'(0) + \frac{k}{2}x(0)\right]e^{-kt/2} \frac{\sinh\left(\frac{t}{2}\sqrt{k^2 - 4}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 4}}.$$

Figura 4.1: Grafici delle funzioni $x(t)$ per $x(0) = 2$ e $x'(0) = 1$ nei casi $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$.

4.5 Punti di equilibrio di sistemi omogenei

Consideriamo un sistema omogeneo della forma

$$\begin{aligned}x' &= a_0 y^m + a_1 y^{m-1} x + \dots + a_m x^m = A_m(x, y), \\y' &= b_0 y^m + b_1 y^{m-1} x + \dots + b_m x^m = B_m(x, y).\end{aligned}$$

Questo sistema può essere riscritto come una equazione omogenea del seguente tipo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 y^m + a_1 y^{m-1} x + \dots + a_m x^m}{b_0 y^m + b_1 y^{m-1} x + \dots + b_m x^m} = \frac{A_m(x, y)}{B_m(x, y)}.$$

Introduciamo le coordinate polari

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \tau = \tan \theta,$$

e scriviamo

$$A_m(\theta) = a_0 \sin^m \theta + a_1 \sin^{m-1} \theta \cos \theta + \dots + a_m \cos^m \theta,$$

$$B_m(\theta) = b_0 \sin^m \theta + b_1 \sin^{m-1} \theta \cos \theta + \dots + b_m \cos^m \theta;$$

poniamo

$$Z(\theta) = A_m(\theta) \sin \theta + B_m(\theta) \cos \theta,$$

$$N(\theta) = B_m(\theta) \sin \theta - A_m(\theta) \cos \theta.$$

Allora, il sistema diventa

$$\frac{dr}{d\theta} = -r \frac{Z(\theta)}{N(\theta)},$$

da cui

$$r(\theta) = r_0 e^{-\int_{\theta_0}^{\theta} (Z(\theta)/N(\theta))d\theta}.$$

Per descrivere le traiettorie vicino all'origine, dobbiamo determinare le soluzioni reali dell'equazione:

$$N(\theta) = 0.$$

Se si verifica che l'equazione

$$N(\theta) = 0$$

non presenta soluzioni reali, si ha il seguente teorema:

Teorema 4.5.1. Quando l'equazione $N(\theta) = 0$ non ha radici reali, allora possono verificarsi i seguenti casi:

- i) se $\int_0^{2\pi} (Z(\theta)/N(\theta))d\theta = 0$, allora tutte le traiettorie sono chiuse e l'origine è un centro.
- ii) Se $\int_0^{2\pi} (Z(\theta)/N(\theta))d\theta > 0$, allora $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} r(\theta) = 0$, le traiettorie sono delle spirali e l'origine è un fuoco stabile.
- iii) Se $\int_0^{2\pi} (Z(\theta)/N(\theta))d\theta < 0$, allora $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} r(\theta) = 0$ e l'origine è un fuoco instabile.

Consideriamo, ora, il caso in cui le soluzioni siano reali. In particolare, supponiamo che θ_j sia una radice reale di molteplicità ν_j . Poiché $N(\theta)$ è un polinomio omogeneo in $\sin \theta$ e $\cos \theta$, possiamo scrivere

$$N(\theta) = \sin \nu_j(\theta - \theta_j) \cdot Q_j(\theta),$$

dove $Q_j(\theta_j) \neq 0$ e $Q_j(\theta)$ è un polinomio omogeneo di grado $m - \nu_j$ in $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$. Inoltre risulta che $(Z(\theta_j)/Q_j(\theta_j)) \neq 0$.

Enunciamo, dunque, il seguente teorema:

Teorema 4.5.2. Consideriamo un raggio integrale corrispondente alla radice reale θ_j dell'equazione $N(\theta) = 0$ di molteplicità algebrica ν_j . Allora possono verificarsi i seguenti casi:

- i) se ν_j è dispari e $(Z(\theta_j)/Q_j(\theta_j)) < 0$, allora $r(\theta)$ tende a zero per $\theta \rightarrow \theta_j$. Quindi, su entrambi i lati del raggio integrale, le traiettorie tendono verso l'origine per $\theta \rightarrow \theta_j$. Il raggio è detto *nodale*.
- ii) Se ν_j è dispari e $(Z(\theta_j)/Q_j(\theta_j)) > 0$, allora, su entrambi i lati del raggio integrale, le traiettorie si allontanano dall'origine per $\theta \rightarrow \theta_j$. Il raggio è detto *isolato*.

- iii) Se ν_j è pari e $(Z(\theta_j)/Q_j(\theta_j)) < 0$, allora $r(\theta) \rightarrow 0$ per $\theta \rightarrow \theta_j^+$ e $r(\theta) \rightarrow +\infty$ per $\theta \rightarrow \theta_j^-$.
- iv) Se ν_j è pari e $(Z(\theta_j)/Q_j(\theta_j)) > 0$, allora $r(\theta) \rightarrow +\infty$ per $\theta \rightarrow \theta_j^+$ e $r(\theta) \rightarrow 0$ per $\theta \rightarrow \theta_j^-$. In tutti i casi, le traiettorie che tendono verso l'origine sono tangenti nell'origine al raggio dato.

Consideriamo, ora, l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 y^m + a_1 y^{m-1} x + \dots + a_m x^m + d(x, y)}{b_0 y^m + b_1 y^{m-1} x + \dots + b_m x^m + e(x, y)} = \frac{A_m(x, y) + d(x, y)}{B_m(x, y) + e(x, y)},$$

e cerchiamo le condizioni sulle funzioni $d(x, y)$ e $e(x, y)$ affinché il comportamento delle traiettorie nelle vicinanze dell'origine relative alle soluzioni di questa equazione sia lo stesso delle traiettorie relative alle soluzioni dell'equazione troncata

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + a_0 y}{b_1 x + b_0 y}.$$

Passiamo alle coordinate polari e scriviamo l'equazione non troncata nella forma

$$\frac{dr}{d\theta} = -r \frac{Z(\theta) + \Delta(r, \theta)}{N(\theta) + E(r, \theta)}.$$

Supponiamo che entrambe le funzioni $\Delta(r, \theta)$ e $E(r, \theta)$ siano continue in r e θ , periodiche in θ con periodo 2π e che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Delta(r, \theta) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} E(r, \theta) = 0,$$

uniformemente in θ . Se l'equazione $N(\theta) = 0$ non presenta radici reali, allora possiamo supporre che per ogni punto (r_0, θ_0) esista un ρ_1 , con $0 < r \leq \rho_1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tale che vi sia un rettangolo contenente il punto (r_0, θ_0) in cui si abbia

$$|\Delta(r_1, \theta) - \Delta(r_2, \theta)| + |E(r_1, \theta) - E(r_2, \theta)| \leq H(r_0, \theta_0) |r_1 - r_2|.$$

In particolare, questa condizione è soddisfatta se entrambe le funzioni $\Delta(r, \theta)$ e $E(r, \theta)$ hanno derivate parziali limitate rispetto ad r . Se l'equazione $N(\theta) = 0$ presenta radici reali, allora possiamo enumerare le n radici nell'intervallo $0 \leq \theta < 2\pi$ in ordine crescente di grandezza. Quindi, possiamo scrivere

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi.$$

Assumiamo che esistano $\rho_1, \overline{\theta_j}$ e $\overline{\theta_j}$ tali che per ogni $j = 1, 2, \dots, n$ presentino le seguenti proprietà:

1) $\bar{\theta}_j < \theta_j < \overline{\bar{\theta}}_j$.

2) L'intervallo $\bar{\theta}_j \leq \theta \leq \overline{\bar{\theta}}_j$ non contiene radici dell'equazione $Z(\theta) = 0$.

3) Per ogni punto (r_0, θ_0) in

$$0 < r \leq \rho_1, \quad \bar{\theta}_j \leq \theta \leq \overline{\bar{\theta}}_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

esiste un rettangolo contenente il punto, in cui si ha

$$|\Delta(r, \theta') - \Delta(r, \theta'')| + |E(r, \theta') - E(r, \theta'')| \leq H(r_0, \theta_0)|\theta' - \theta''|.$$

4) Per ogni punto (r_0, θ_0) del rimanente dominio

$$0 < r \leq \rho_1, \quad \overline{\bar{\theta}}_j \leq \theta \leq \theta_{j+1}, \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

esiste un rettangolo contenente il punto, in cui si ha

$$|\Delta(r_1, \theta) - \Delta(r_2, \theta)| + |E(r_1, \theta) - E(r_2, \theta)| \leq H(r_0, \theta_0)|r_1 - r_2|.$$

Se l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 y^m + a_1 y^{m-1} x + \dots + a_m x^m}{b_0 y^m + b_1 y^{m-1} x + \dots + b_m x^m} = \frac{A_m(x, y)}{B_m(x, y)},$$

presenta un raggio isolato $\theta = \theta_j$ di molteplicità ν_j , allora possiamo supporre che esistano ω , ρ_2 e μ , con $\mu < 1$, soddisfacenti le seguenti proprietà:

1) le derivate parziali $\frac{\partial \Delta(r, \theta)}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial E(r, \theta)}{\partial \theta}$ sono limitate e continue in

$$\theta_j - \omega \leq \theta \leq \theta_j + \omega, \quad 0 \leq r \leq \rho_2, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

2) Per le funzioni

$$g_j(r) = \max_{\theta_j - \omega \leq \theta \leq \theta_j + \omega} |E(r, \theta)|, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

gli integrali, $\int_0^{\rho_2} \frac{g_j}{r} dr = E$, sono finiti.

3) Per le funzioni

$$h_j(r) = \min_{\theta_j - \omega \leq \theta \leq \theta_j + \omega} \left\{ Z(\theta_j)(\mu \nu_j Q_j(\theta_j)(\theta - \theta_j)^{\nu_j - 1} + \frac{\partial E(r, \theta)}{\partial \theta}), 0 \right\},$$

gli integrali, $\int_0^{\rho_2} \frac{h_j(r)}{r} dr$, sono finiti.

Se un raggio $\theta = \theta_j$ è di molteplicità pari ν_j , possiamo supporre che esistano positivi γ_1 e R' in maniera tale che gli integrali

$$\int_0^{R'} \frac{g_j(r) |\log r|}{r} dr, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

sono finiti, con $g_j(r) = \max_{\theta_j - \gamma_1 \leq \theta \leq \theta_j + \gamma_1} |E(r, \theta)|$.

Osservazioni 4.1. Osserviamo che tutte le condizioni sopra scritte sono soddisfatte se esiste un α tale che

$$\frac{E(r, \theta)}{r^\alpha} \rightarrow 0, \quad \frac{\Delta(r, \theta)}{r^\alpha} \rightarrow 0,$$

uniformemente in θ , per $r \rightarrow 0$.

Enunciamo il seguente teorema:

Teorema 4.5.3. Se l'equazione

$$\frac{dr}{d\theta} = -r \frac{Z(\theta) + \Delta(r, \theta)}{N(\theta) + E(r, \theta)},$$

soddisfa tutte le condizioni sopra elencate, allora, nelle vicinanze dell'origine, le soluzioni dell'equazione si comportano essenzialmente come le soluzioni della corrispondente equazione troncata. Più precisamente,

- a) se l'origine è un fuoco dell'equazione troncata, allora lo è anche per l'equazione di partenza.
- b) Se l'origine è un centro dell'equazione troncata, allora ogni traiettoria dell'equazione originale, nelle vicinanze dell'origine, è una curva chiusa o è una spirale.
- c) Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} [x(t)^2 + y(t)^2] = 0$ per ogni traiettoria del sistema di partenza, $x = x(t)$, $y = y(t)$, allora questa traiettoria è una spirale oppure è tangente nell'origine al raggio determinato da una radice reale dell'equazione $N(\theta) = 0$.
- d) Se $\theta = \theta_j$ è un raggio nodale del sistema troncato, allora una traiettoria del sistema di partenza tende a spostarsi verso l'origine ed è tangente nell'origine al raggio $\theta = \theta_j$.
- e) Se $\theta = \theta_j$ è un raggio isolato del sistema troncato, allora il sistema di partenza presenta una sola traiettoria, $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, che tende verso l'origine e per la quale si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \theta_j.$$

f) Se $\theta = \theta_j$ è un raggio integrale di molteplicità pari del sistema troncato, allora esiste una traiettoria, $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, del sistema originale, tangente nell'origine al raggio e tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \theta_j.$$

Esempio 4.1. Consideriamo il sistema

$$\frac{dx}{dt} = -x + \frac{2y}{\log(x^2 + y^2)}, \quad \frac{dy}{dt} = -y - \frac{2x}{\log(x^2 + y^2)}.$$

L'origine è un nodo singolare del corrispondente sistema troncato:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Considerando nuovamente il sistema originale e passando alle coordinate polari, otteniamo

$$\frac{dr}{dt} = -r, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\log r},$$

da cui

$$r = r_0 e^{-t}, \quad \theta = \theta_0 + \log(t - \log r_0), \quad t > \log r_0.$$

Allora si ha che $r \rightarrow 0$ e $\theta \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ e l'origine è un fuoco stabile del dato sistema. Osserviamo, dunque, che, con l'aggiunta di termini lineari infinitesimali nel sistema, possiamo variare il comportamento delle soluzioni nelle vicinanze dell'origine.

Esempio 4.2. Consideriamo il sistema dinamico in coordinate polari

$$\dot{r} = r(1 - r), \quad \dot{\theta} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta).$$

Quindi lungo le orbite è crescente l'angolo polare θ e, per $0 < r < 1$, la distanza dall'origine r , mentre la distanza dall'origine r è decrescente per $r > 1$. I punti di equilibrio (in coordinate cartesiane) sono $(0, 0)$ e $(1, 0)$, ambedue instabili. Purtroppo il punto $(1, 0)$ è un attractor con bacino di attrazione $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. L'instabilità del punto di equilibrio $(1, 0)$ risulta dal fatto che ogni suo intorno contiene delle orbite che si allontanano da $(1, 0)$. Si noti che il tempo di viaggio lungo un'orbita chiusa che parte da $(1, 0)$ e ci ritorna, è dato da

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{1}{2}(1 - \cos \theta)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin^2(\frac{1}{2}\theta)} = [-2\cotg(\frac{1}{2}\theta)]_0^{2\pi} = +\infty.$$

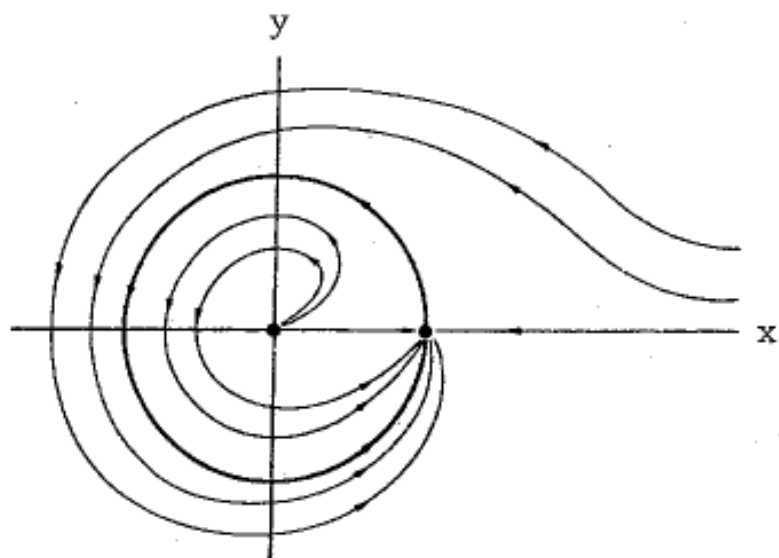


Figura 4.2: Orbite per un sistema dinamico con due punti di equilibrio instabili [18].

Capitolo 5

Stabilità secondo Liapunov

In questo capitolo verrà discussa a profondità la stabilità secondo Liapunov.¹ Dopo l'introduzione del concetto di stabilità, verranno catalogati i diversi casi rilevanti al sistema dinamico lineare $x' = Ax$, dove A è una matrice reale $n \times n$. Poi verrà dimostrato che, sotto opportune condizioni, un sistema dinamico nonlineare è stabile se e solo se lo è la sua linearizzazione. Infine discuteremo tre applicazioni: il pendolo semplice, le oscillazioni smorzate ed il modello preda-predatore di Lotka-Volterra.

5.1 Stabilità secondo Liapunov

Nello studio di sistemi dinamici, il concetto di stabilità risulta essere tra i più importanti sia dal punto di vista teorico e sia dal punto di vista applicativo. Sappiamo che un processo di evoluzione temporale di uno stato di un sistema fisico può essere descritto matematicamente da un campo vettoriale nello spazio delle fasi. Un punto dello spazio delle fasi definisce un determinato stato del sistema, e in questo punto il vettore indica la velocità con cui varia lo stato del sistema. Abbiamo visto che i punti in cui il vettore risulta essere nullo sono detti *punti di equilibrio* e lo stato non varia nel tempo. Sappiamo anche che i sistemi che descrivono processi di evoluzione di un fenomeno dipendono da alcuni parametri (o dati iniziali). Se applichiamo una piccola variazione nei dati, questa produce una variazione nella soluzione, trasformando, in minima parte, un particolare sistema in un altro.

Questa è la stabilità: una sorta di “continuità per cui un piccolo cambia-

¹Il cognome Liapunov del matematico russo Alexandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), viene scritto in molti modi. È molto diffusa, in particolare nel mondo anglosassone, la scrittura Lyapunov.

mento sui dati produce un piccolo e controllabile cambiamento della soluzione. Daremo, ora, la definizione di *stabilità secondo Liapunov*.

Consideriamo il sistema

$$y' = f(y),$$

e sia $\varphi = \varphi(t; 0, \xi)$ una soluzione del sistema definita nell'intervallo $[0, +\infty)$.

Definizione 5.1.1. La soluzione $\varphi(t; 0, \xi)$ si dice *stabile secondo Liapunov* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che se $\|\eta - \xi\| < \delta$, allora la soluzione $\psi(t) = \psi(t; 0, \eta)$ è definita in $[0, +\infty)$ e $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$, per ogni t appartenente all'intervallo $[0, +\infty)$. Se inoltre $\|\psi(t) - \varphi(t)\| \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$, φ si dice *asintoticamente stabile*. Ovvero: si ha una soluzione stabile se, operando una piccola variazione nelle vicinanze di ξ , per tutto il tempo si rimane vicino alla soluzione $\varphi(t; 0, \xi)$; si ha una soluzione asintoticamente stabile se, operando una piccola variazione nelle vicinanze di ξ , la distanza della soluzione φ tende a zero all'infinito. Ora, se un punto di equilibrio $\varphi(t) = y_0$, dove $f(y_0) = 0$, è asintoticamente stabile, l'insieme dei punti $\xi \in \Omega$ tale che $\varphi(t; 0, \xi) \rightarrow y_0$ per $t \rightarrow +\infty$ è detto *bacino di attrazione* di y_0 .

Se il bacino di attrazione è tutto Ω , y_0 è detto *globalmente asintoticamente stabile* in Ω (spazio delle fasi).

5.2 Stabilità per sistemi autonomi sulla retta

Sia data un'equazione differenziale del primo ordine del tipo

$$x' = f(x), \tag{5.1}$$

dove la f è di classe $C^1(\mathbb{R})$. Ricordando che, da un punto di vista applicativo, si può pensare ad un'equazione differenziale come ad un modello per la descrizione di un determinato fenomeno in evoluzione, ad essa si possono affiancare delle condizioni iniziali, che definiscono un problema di Cauchy, di cui il teorema di esistenza delle soluzioni assicura l'attendibilità del modello, mentre l'unicità fornisce l'unica possibilità di evoluzione del fenomeno. Supponiamo, allora, che siano note alcune condizioni iniziali. Siano

$$f(x_1) = f(x_2) = 0, \quad f(x) \neq 0 \text{ per } x \neq x_1, x_2, \quad f'(x_1) < 0 \text{ e } f'(x_2) > 0.$$

Sull'asse orizzontale o *asse delle fasi*, si può visualizzare l'andamento di $x = x(t)$. Tra le ordinate vengono collocati i valori di $f(x)$: se risulta che la f è positiva, allora x sta crescendo, e, dunque, il suo movimento, sull'asse orizzontale, procede verso destra. Se la f risulta negativa, si verifica il contrario. Considerando i dati iniziali e quanto è stato detto sopra, si trova che x_2 è instabile: partendo da un punto ad esso vicino, da esso ci si allontana.

Consideriamo x_1 . Dimostriamo che una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

con $x_1 < x_0 < x_2$, o, $x_0 < x_1 < x_2$, esiste per qualunque $t \geq t_0$ e che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_1.$$

Supponiamo che $x_1 < x_0 < x_2$. Osserviamo che, essendo la f negativa tra x_1 e x_2 , $x(t)$ risulta decrescente per $t \geq t_0$. Consideriamo, ora, l'intervallo massimale di definizione di $x(t)$, $[t_0, \tau)$. Poiché $x(t) > x_1$, allora esiste finito $\lim_{t \rightarrow \tau} x(t)$. Se fosse $\tau < +\infty$, allora la soluzione si potrebbe prolungare oltre τ e l'intervallo $[t_0, \tau)$ non sarebbe più massimale. Quindi, $\tau = +\infty$. Sia, ora, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$. Poiché $x' = f(x)$ e la f è continua, allora risulta che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = f(\bar{x}).$$

D'altra parte, l'esistenza di due limiti finiti implica che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = 0,$$

da cui si deduce che $f(\bar{x}) = 0$ e, quindi, che $\bar{x} = x_1$. In altre parole, x_1 è asintoticamente stabile.

5.3 Stabilità dell'origine di sistemi lineari a coefficienti costanti

Sia dato il sistema a coefficienti costanti

$$y' = Ay,$$

dove A è una matrice reale di ordine n . Indichiamo con λ_i gli autovalori di A , dove $i = 1, \dots, k$. Vale il seguente teorema:

Teorema 5.3.1. Abbiamo i seguenti tre casi:

- i) L'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile se e soltanto se $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, per ogni $i = 1, \dots, k$. La stabilità è globale in \mathbb{R}^n .
- ii) L'origine è stabile, ma non asintoticamente se e soltanto se $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ e tutti gli autovalori con parte reale nulla sono regolari (cioè, la dimensione dell'autospazio è pari alla molteplicità dell'autovalore).

iii) L'origine è instabile negli altri casi.

Dimostrazione. i) Ci ricordiamo che, dato il sistema $z' = Az$, se l'equazione caratteristica $\|A - \lambda I_n\| = 0$ possiede le radici $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di molteplicità rispettivamente m_1, \dots, m_n , la soluzione generale del sistema è della forma

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{m_j} c^{ij} t^{i-1} e^{\lambda_j t},$$

dove i c^{ij} sono opportuni vettori. Da questa formula segue che ogni soluzione φ è somma di addendi del tipo $ct^h e^{\lambda_j t}$, $c \in \mathbb{R}$. Se $\text{Re}(\lambda_j) < 0$ per ogni λ_j , $\varphi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ e, per questo motivo, 0 è asintoticamente stabile, con bacino d'attrazione coincidente con \mathbb{R}^n . Viceversa, se 0 è asintoticamente stabile, allora non possono esistere autovalori con parte reale non negativa. Esisterebbero, infatti, in tal caso, soluzioni che non tendono a 0 per $t \rightarrow +\infty$.

ii) Se vale la condizione sugli autovalori, gli addendi dell'espressione della soluzione sopra vista sono della forma

$$ct^h e^{\lambda_j t}, \quad (h \geq 0), \quad \text{se } \text{Re}(\lambda_j) < 0,$$

oppure

$$c e^{i \text{Im}(\lambda_j) t}, \quad \text{se } \text{Re}(\lambda_j) = 0.$$

I primi tendono a 0 per $t \rightarrow +\infty$, i secondi sono neutralmente stabili. Viceversa, se 0 è stabile, gli addendi dell'espressione della soluzione possono essere soltanto del tipo sopra indicato e, per questo motivo, vale la condizione indicata sugli autovalori.

iii) Se esistono autovalori con parte reale positiva oppure immaginari puri e non regolari, allora esistono soluzioni del tipo

$$\varphi(t) = ce^{\lambda_j t} \quad \text{o} \quad \varphi(t) = (c + c_1 t + \dots + c_{k_j-1} t^{k_j-1}) e^{i \text{Im}(\lambda_j) t},$$

la cui norma tende all'infinito, per $t \rightarrow +\infty$. ■

Si può notare che $\varphi(0) = c$ e che la funzione $\alpha\varphi$ (dove α è una costante) è ancora soluzione con $\varphi(0) = \alpha c$. Dunque, scegliendo opportunamente $\alpha \neq 0$, la soluzione parte da un punto vicino all'origine quanto si vuole, mentre $\|\alpha\varphi(t)\| \rightarrow +\infty$. Ciò significa instabilità per 0. Utilizzando questo

teorema, possiamo classificare il comportamento delle traiettorie del sistema nelle vicinanze dell'origine.

Infatti, sia dato un sistema omogeneo bidimensionale

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

dove $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $\det(A) = ad - bc \neq 0$, in modo tale che l'origine sia l'unico stato di equilibrio del sistema. Indichiamo con λ_1 e λ_2 gli autovalori di A , soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0,$$

dove $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$ e $\det A = \lambda_1\lambda_2$.

Distinguiamo i seguenti casi a seconda che la matrice A possieda:

- i) due autovalori λ_1, λ_2 reali e distinti;
- ii) due autovalori reali e coincidenti;
- iii) due autovalori complessi coniugati.

Inoltre, a seconda dei relativi segni degli autovalori, avremo ulteriori sottocasi.

- i) **Autovalori reali e distinti.** Il sistema presenta le due soluzioni linearmente indipendenti

$$h^1 e^{\lambda_1 t}, \quad h^2 e^{\lambda_2 t},$$

dove h^1 e h^2 sono gli autovettori reali corrispondenti rispettivamente agli autovalori λ_1, λ_2 . Ogni soluzione sarà del tipo

$$\varphi(t) = c_1 h^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 h^2 e^{\lambda_2 t},$$

dove c_1, c_2 sono costanti reali. Abbiamo i seguenti sottocasi:

- 1) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Ogni traiettoria, partendo da un qualunque punto dello spazio delle fasi, si avvicina indefinitamente all'origine. Il punto di equilibrio è detto **nodo stabile**.
- 2) $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. L'origine è instabile. La soluzione, partendo da un qualunque punto dello spazio delle fasi, si allontana indefinitamente dall'origine. Il punto di equilibrio è detto **nodo instabile**.

3) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. L'origine è instabile. Osservando il grafico, per $c_2 = 0$, le traiettorie rettilinee γ_1^\pm guidano il punto mobile, rappresentante la soluzione, ad avvicinarsi indefinitamente all'origine. Per $c_1 = 0$, le traiettorie γ_2^\pm lo inducono ad allontanarsi indefinitamente. Il punto di equilibrio è detto **colle** o **sella**.

ii) **Autovalori reali uguali.** Indichiamo con λ l'autovalore doppio della matrice A . La soluzione sarà del tipo

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t},$$

dove c_1, c_2 sono due costanti arbitrarie. Abbiamo i seguenti sottocasi:

1) $\lambda < 0$. L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Ogni traiettoria si avvicina indefinitamente all'origine. Il punto di equilibrio è detto **nodo stabile**.

2) $\lambda > 0$. L'origine è instabile: tutte le traiettorie si allontanano indefinitamente dall'origine. Il punto 0 è detto **nodo instabile**.

iii) **Autovalori complessi coniugati.** Indichiamo con

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \bar{\lambda} = \alpha - i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

gli autovalori complessi coniugati della matrice A . La coppia di soluzioni linearmente indipendenti è data da

$$h e^{(\alpha+i\beta)t}, \quad \bar{h} e^{(\alpha-i\beta)t}.$$

A questa coppia di soluzioni sostituiamo la seguente coppia di soluzioni reali:

$$\varphi^1(t) = e^{\alpha t} (h_1 \cos(\beta t) - h_2 \sin(\beta t)), \quad \varphi^2(t) = e^{\alpha t} (h_1 \sin(\beta t) + h_2 \cos(\beta t)),$$

dove abbiamo posto $h = \frac{1}{2}(h_1 + ih_2)$, con $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$. La soluzione generale in forma reale è data da

$$\varphi(t) = c_1 \varphi^1(t) + c_2 \varphi^2(t) = e^{\alpha t} [(c_1 h_1 + c_2 h_2) \cos(\beta t) + (c_2 h_1 - c_1 h_2) \sin(\beta t)],$$

dove c_1, c_2 sono costanti arbitrarie. Abbiamo i seguenti sottocasi:

1) $\alpha = 0$. L'origine è stabile. Le traiettorie sono delle ellissi. Il punto 0 è detto **centro**.

2) $\alpha < 0$. L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Le traiettorie si avvicinano indefinitamente all'origine con un andamento a spirale. Il punto 0 è detto **fuoco stabile**.

3) $\alpha > 0$. L'origine è instabile. Le traiettorie si allontanano indefinitamente dall'origine. Il punto 0 è detto **fuoco instabile**.

Ponendo $\Delta = (\text{tr } A)^2 - 4 \det(A)$, riassumiamo, brevemente, quanto sopra scritto con il seguente schema:

i)

$$\Delta > 0 : \begin{cases} \det(A) > 0, \text{tr } A < 0 : & \text{asintoticamente stabile,} \\ \det(A) > 0, \text{tr } A > 0 : & \text{instabile,} \\ \det(A) > 0 : & \text{colle o sella, instabile.} \end{cases}$$

ii)

$$\Delta = 0 : \begin{cases} b^2 + c^2 > 0 : & \text{nodo,} \\ b = c = 0, \text{tr } A < 0 : & \text{nodo a stella, asintoticamente stabile,} \\ b = c = 0, \text{tr } A > 0 : & \text{instabile.} \end{cases}$$

iii)

$$\Delta < 0 : \begin{cases} \text{tr } A = 0 : & \text{centro, neutralmente stabile,} \\ \text{tr } A < 0 : & \text{fuoco asintoticamente stabile,} \\ \text{tr } A > 0 : & \text{fuoco instabile.} \end{cases}$$

Sotto (in parte nelle pagine successive) presentiamo in modo grafico alcuni esempi di punti di equilibrio: centro, fuoco stabile, nodo stabile, nodo a stella e colle.

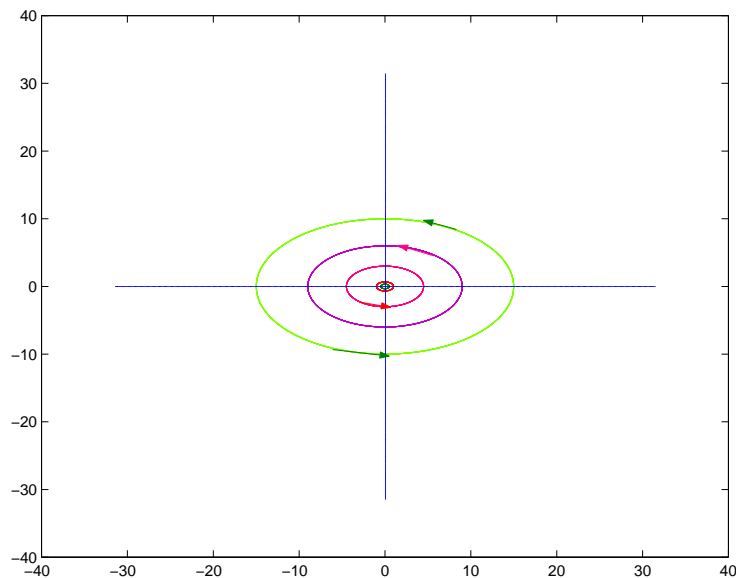


Figura 5.1: Centro con orientazione positiva.

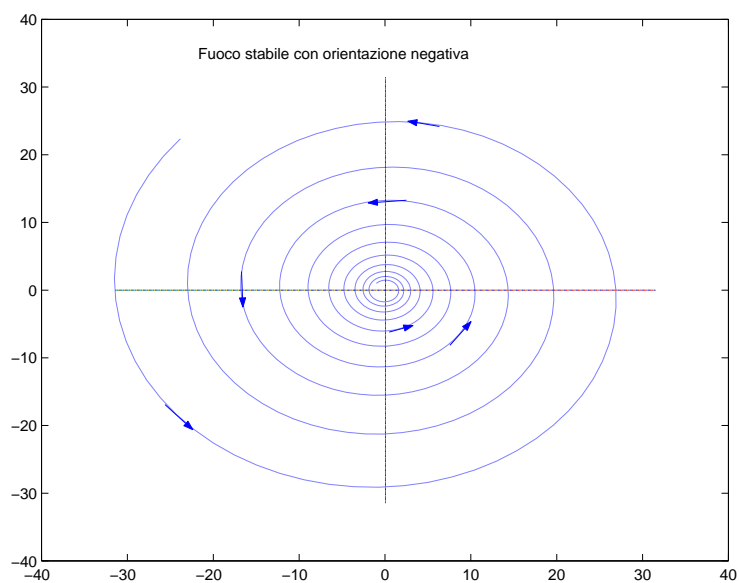


Figura 5.2: Fuoco stabile con orientazione positiva.

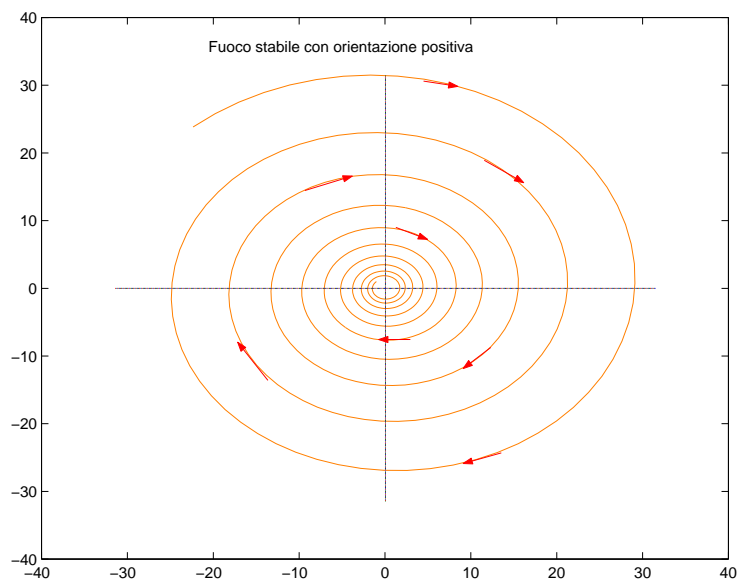


Figura 5.3: Fuoco stabile con orientazione negativa.

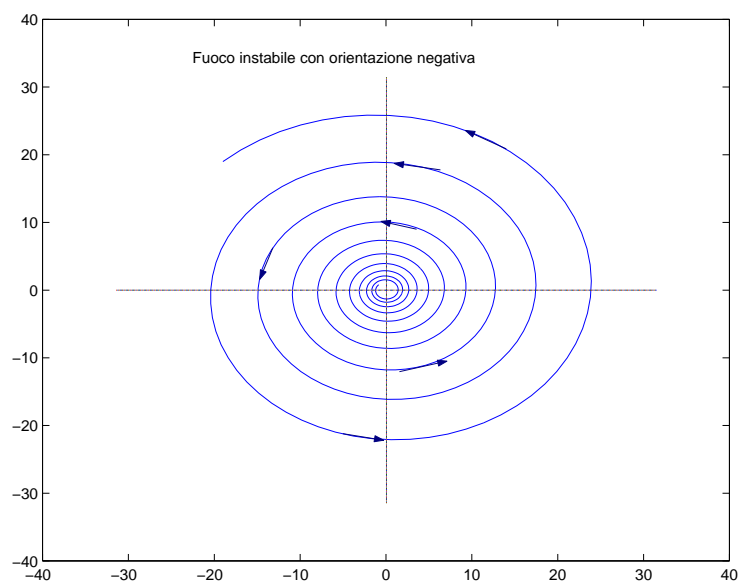


Figura 5.4: Fuoco instabile con orientazione negativa.

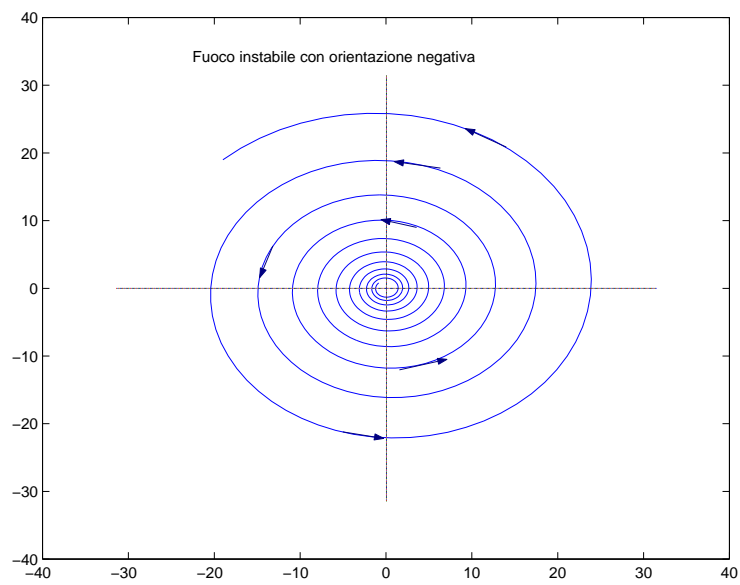


Figura 5.5: Fuoco instabile con orientazione positiva.

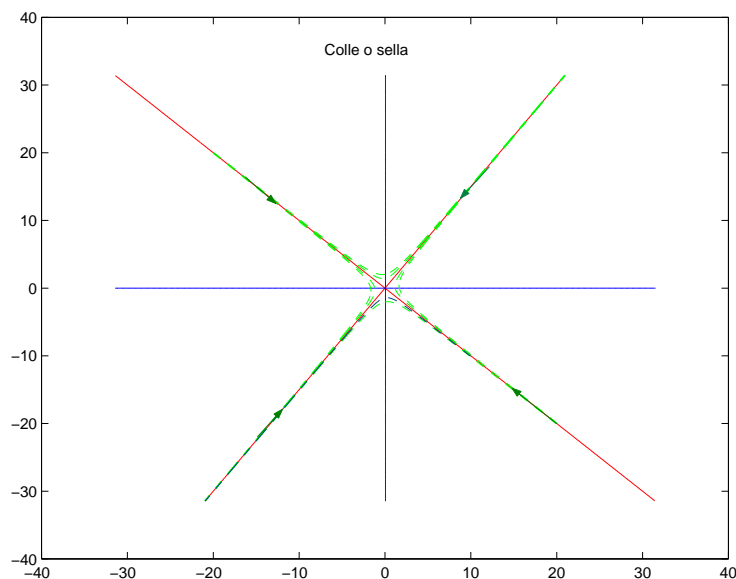


Figura 5.6: Colle o sella.

5.4 Funzione di Liapunov e linearizzazione

Tra i metodi utilizzati nell'analisi della stabilità dell'origine, vi è quello di Liapunov che deve la sua formulazione al classico teorema di Lagrange (1788):

“Se in un sistema meccanico conservativo l'energia potenziale ha un minimo focale forte, allora in quel punto l'equilibrio è stabile.”

Dunque, nell'ambito dei sistemi meccanici conservativi si può giungere alla ricerca della stabilità, studiando le proprietà dell'energia potenziale. Analogamente, nel **metodo di Liapunov** risulta rilevante lo studio di una funzione scalare (detta appunto **funzione di Liapunov**), che costituisce una “generalizzazione dell'energia potenziale.

Per questa funzione vale il seguente teorema:

Teorema 5.4.1 (Liapunov). Sia 0 un punto di equilibrio del sistema dinamico

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)),$$

dove, per un aperto Ω in \mathbb{R}^n contenente 0 , $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ è localmente lipschitziana e $\mathbf{F}(0) = 0$. Supponiamo che, per un aperto A con $0 \in A \subset \Omega$, esista una cosiddetta funzione di Liapunov $H : A \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- i) H è di classe C^1 in A ;

- ii) $H(y) > 0$ per ogni $y \in A \setminus \{0\}$;
- iii) vale una delle seguenti condizioni:
 - a) $\mathbf{F} \cdot \nabla H \leq 0$ in A ;
 - b) $\mathbf{F} \cdot \nabla H < 0$ in $A \setminus \{0\}$;
 - c) $\mathbf{F} \cdot \nabla H > 0$ in $A \setminus \{0\}$.

Allora il punto di equilibrio 0 è stabile [se vale la (a)], asintoticamente stabile [se vale la (b)], o non stabile [se vale la (c)].

Prima di dimostrare il famoso teorema di Liapunov, discutiamo un esempio illustrativo. Per le quattro costanti reali a, b, c, d , con $a < 0$, consideriamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} x'(t) = ax - cy, \\ y'(t) = cx + ay. \end{cases}$$

Ponendo $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ risulta

$$\begin{aligned} H'(t) &= x x'(t) + y y'(t) \\ &= x(ax - cy) + y(cx + ay) \\ &= a(x^2 + y^2) = 2aH \leq 0, \end{aligned}$$

dove vale il segno uguale se e solo se $x = y = 0$. Quindi

$$H(x(t), y(t)) = H(x(0), y(0))e^{2at} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

per ogni $x(0), y(0)$. Quindi $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ se $t \rightarrow +\infty$, facendo asintoticamente stabile il punti di equilibrio 0 .

Consideriamo ora il sistema dinamico

$$\begin{cases} x'(t) = -x - 2y^2, \\ y'(t) = xy - y^3, \end{cases}$$

per cui 0 è un punto di equilibrio. Ponendo $H(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$, risulta

$$H'(t) = x x'(t) + 2y y'(t) = -x(x + 2y^2) + 2y(xy - y^3) = -(x^2 + 2y^4) \leq 0,$$

dove vale il segno uguale se e solo se $x = y = 0$. Quindi 0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Infine, consideriamo il sistema hamiltoniano

$$\mathbf{p}'(t) = -\nabla_{\mathbf{q}} H, \quad \mathbf{q}'(t) = \nabla_{\mathbf{p}} H,$$

dove $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ e la funzione hamiltoniana ha la forma

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + V(\mathbf{q}),$$

dove T è una forma quadratica definita positiva e $\mathbf{q} = 0$ è un minimo stretto dalla funzione V . In tal caso $(0, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$ è un punto di equilibrio, H è definita positiva in un intorno di $(0, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$ e $H'(t) = 0$. Quindi la H è una funzione di Liapunov e l'origine è un punto di equilibrio stabile.

Ora, enunceremo i lemmi, di particolare rilievo nello studio della funzione di Liapunov, attraverso i quali si giunge alla dimostrazione del teorema sopra citato.

Lemma 5.4.1 (di intrappolamento delle orbite). Sia H una funzione di Liapunov con $H' < 0$ in $A \setminus \{0\}$. Sia Γ un aperto limitato tale che la sua chiusura sia contenuta in A , cioè $\bar{\Gamma} \subset A$ e $\xi \in \Gamma$. Supponiamo che $H(\xi) < a$ e $H(y) \geq a$ per ogni $y \in \partial\Gamma$ (frontiera dell'insieme Γ), dove a è una costante positiva. Allora esiste la soluzione $\varphi(t; 0, \xi)$ per $t \geq 0$ e $\varphi(t; 0, \xi) \in \Gamma$ per ogni $t \geq 0$ (ossia, la soluzione φ non può uscire da Γ).

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $\varphi(t; 0, \xi)$ esca da Γ . Poniamo $t^* = \inf\{t \geq 0 : \varphi(t) \notin \Gamma\}$ = 'primo tempo di uscita da Γ . Per la continuità di φ , si ha $\varphi(t^*) \in \partial\Gamma$; inoltre, per la definizione di t^* , $\varphi(t) \in \Gamma$ per $0 \leq t < t^*$. Allora, ponendo $\phi(t) = H(\varphi(t))$, avremo

$$\phi(0) = H(\varphi(0)) = H(\xi) < a, \quad \phi'(t) = (H \circ \varphi)'(t) \leq 0$$

e

$$\phi(t^*) = H(\varphi(t^*)) \geq a.$$

Contraddizione. Dunque, φ non può uscire da Γ . In base alle proprietà delle orbite viste nel capitolo precedente, φ esiste per $t \geq 0$. ■

Lemma 5.4.2 (di escursione delle orbite). Sia Γ un aperto limitato tale che $\bar{\Gamma} \subset A$. Supponiamo che $H(y) \geq a$ e $H'(y) \leq -b < 0$, per ogni $y \in \Gamma$, dove a e b sono delle costanti positive. Se $\xi \in \Gamma$ e $\varphi(t; 0, \xi)$ è definita per $t \geq 0$, allora $\varphi(t; 0, \xi)$ esce da Γ .

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $\varphi(t; 0, \xi) \in \Gamma$ per ogni $t \geq 0$. Si ha

$$a \leq H(\varphi(t)) = \int_0^t H'(\varphi(s)) ds + H(\xi) \leq -bt + H(\xi).$$

Per $t \rightarrow +\infty$, $-bt + H(\xi) \rightarrow -\infty$. Contraddizione. ■

Lemma 5.4.3 (di attrattività dell'origine). Sia Γ_0 un aperto limitato, $\bar{\Gamma}_0 \subset A$, $0 \in \Gamma_0$. Sia H una funzione di Liapunov con $H' < 0$ in $A \setminus \{0\}$. Se $\xi \in \Gamma_0$ e $\varphi(t; 0, \xi) \in \Gamma_0$ per $t \geq 0$, allora $\varphi(t; 0, \xi) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Essendo $H' < 0$ in A , $\phi(t) = H(\varphi(t))$ è strettamente decrescente. Mostriamo che $H(\varphi(t)) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. Se così non fosse, ponendo $0 < \mu = \limsup_{t \rightarrow +\infty} H(\varphi(t))$, $\varphi(t) \rightarrow \mu > 0$ per $t \rightarrow +\infty$ e $\phi(t) \geq \underline{\mu}$ per $t \geq 0$. Essendo $H(0) = 0$, esiste un intorno $B_\delta(0)$ tale che, se $y \in \overline{B_\delta(0)}$, $H(y) \leq \frac{\underline{\mu}}{2}$. Si noti che allora $\xi \in \Gamma_0 \setminus \overline{B_\delta(0)}$. Siano $a > 0$ il minimo di H e $-b < 0$ il massimo di H' su $\bar{\Gamma}_0 \setminus B_\delta(0)$. In base al lemma precedente, $\varphi(t; 0, \xi)$ deve uscire da $\Gamma = \Gamma_0 \setminus \overline{B_\delta(0)}$. Non può, tuttavia, uscire attraverso $\partial\Gamma_0$ per ipotesi e neppure attraverso $\partial B_\delta(0)$ poiché se $\varphi \in \overline{B_\delta(0)}$, $H(\varphi(t)) \leq \frac{\underline{\mu}}{2}$. Contraddizione.

Dunque, $H(\varphi(t)) \rightarrow 0$, il che implica $\varphi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. ■

Osservazioni 5.1. Quindi, se si riesce a trovare un aperto $\Gamma_0 \subset \Omega$, limitato e contenente l'unico punto di equilibrio 0, in cui sono intrappolate le orbite e H' è definita negativa, allora Γ_0 è contenuto nel bacino di attrazione di 0.

Dimostrazione del Teorema 5.4.1. Sia $\epsilon > 0$ tale che $B_\epsilon(0) \subset A$. Poniamo $\Gamma = B_\epsilon(0)$ e $a = \min_{\partial\Gamma} H$. Essendo $\partial\Gamma$ un compatto e H continua e definita positiva, a è ben definito e positivo. Poiché $H(0) = 0$, esiste $B_\delta(0)$ tale che $H(y) \leq \frac{a}{2}$, ogni $y \in B_\delta(0)$. In base al teorema di intrappolamento delle orbite, per ogni $\xi \in B_\delta(0)$, $\varphi(t; 0, \xi)$ esiste e non esce da $B_\delta(0)$. Per questo motivo, 0 è stabile. Se $H' < 0$, l'asintotica stabilità segue dal lemma sull'attrattività dell'origine con $\Gamma_0 = B_\epsilon(0)$. ■

Valgono, dunque, le seguenti proposizioni:

Proposizione 5.4.1. Sia $\Omega = \mathbb{R}^n$ e 0 l'unico punto di equilibrio per il sistema

$$y' = f(y).$$

Se $H'(y) < 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $H(y) \rightarrow +\infty$ per $\|y\| \rightarrow +\infty$, allora l'origine è globalmente asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Sia ξ qualunque punto di \mathbb{R}^n , $\xi \neq 0$, e $H(\xi) = a > 0$. Poiché $H(y) \rightarrow +\infty$ per $\|y\| \rightarrow +\infty$, esiste una sfera $B_r(0)$ di raggio r abbastanza grande, tale che $H(y) \geq 2a$ per $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_r(0)$. In particolare, $H(y) \geq 2a$ su $\partial B_r(0)$. Ma allora, in base al lemma di intrappolamento delle orbite, $\varphi(t; 0, \xi)$ esiste per $t \geq 0$ e non esce da $B_r(0)$. Essendo $H' < 0$ in tutto \mathbb{R}^n , segue dal lemma di attrattività dell'origine che $\varphi(t; 0, \xi) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$. Essendo ξ arbitrario, il bacino di attrazione di 0 è \mathbb{R}^n . ■

Si è già detto, in precedenza, come la ricerca della funzione di Liapunov possa presentare delle difficoltà. Esiste, però, un altro metodo di procedere nella ricerca della stabilità, che consiste nella sostituzione del sistema di partenza non lineare con un sistema lineare approssimante in modo tale da utilizzare la teoria lineare e trasferire ad esso le nuove informazioni ottenute. L'approssimazione è, però, valida solo localmente, ovvero nell'intorno del punto di equilibrio considerato.

Sia, ora, dato un sistema autonomo

$$y' = f(y), \quad (5.2)$$

dove $f \in C^1(\Omega)$, Ω aperto di \mathbb{R}^n e tale che $f(0) = 0$. Si suppone che la matrice jacobiana di f in 0 , $Df(0)$, sia non singolare. Allora, si può scrivere

$$f(y) = Df(0)y + g(y), \quad (5.3)$$

dove $g(y) = o(\|y\|)$ per $y \rightarrow 0$. Ponendo $A = Df(0)$, si consideri il sistema

$$z' = Az \quad (5.4)$$

che prende il nome di *sistema linearizzato*.

Ne segue

Teorema 5.4.2 (Perron). Sia la (5.4) la linearizzazione del sistema dinamico (5.2). Allora

1. Se 0 è asintoticamente stabile per il sistema (5.4), allora lo è anche per il sistema (5.2).
2. Se esiste un autovalore della matrice A nella (5.4) con parte reale positiva, allora 0 è instabile per il sistema (5.2).

La dimostrazione di questo teorema fa ricorso al seguente lemma:

Lemma 5.4.4. Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa, allora esiste una matrice Q simmetrica e definita positiva tale che $Q(A + A^T)$ è definita negativa.

Dimostrazione del Teorema 5.4.2. Poiché 0 è asintoticamente stabile per il sistema (5.4), tutti gli autovalori di A presentano parte reale negativa. Consideriamo la matrice Q del lemma sopra enunciato e la forma quadratica definita positiva

$$H(y) = \langle Qy, y \rangle .$$

Calcoliamo la derivata di H lungo le traiettorie del sistema non lineare (5.2):

$$H'(y) = 2 \langle Qy, Ay \rangle + 2 \langle Qy, g(y) \rangle \quad (5.5)$$

e per la simmetria di Q :

$$2 \langle Qy, Ay \rangle = 2 \langle y, QAy \rangle = \langle y, Q(A + A^T)y \rangle, \quad (5.6)$$

che, per ipotesi, è definita negativa. Se indichiamo con $\lambda_{max} (< 0)$ il massimo autovalore di $Q(A + A^T)$, possiamo scrivere

$$2 \langle Qy, Ay \rangle \leq \lambda_{max} \|y\|^2. \quad (5.7)$$

Poiché $\|g(y)\| = o(\|y\|)$ per $\|y\| \rightarrow 0$, fissando $\varepsilon > 0$, esiste un intorno $B_{\delta_\varepsilon}(0)$ tale che, se $y \in B_{\delta_\varepsilon}(0)$, si ha

$$\|g(y)\| \leq \varepsilon \|y\|.$$

D'altra parte, $\|Qy\| \leq c\|y\|$, dove c è la norma di Q . Di conseguenza, per la disuguaglianza di Schwarz, si ha

$$\| \langle Qy, g(y) \rangle \| \leq \|Qy\| \cdot \|g(y)\| \leq c\varepsilon \|y\|^2. \quad (5.8)$$

Dalle relazioni (5.5), (5.7) e (5.8), segue che

$$H'(y) \leq (\lambda_{max} + c\varepsilon) \|y\|^2.$$

Scegliendo $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo in maniera tale che $\lambda_{max} + c\varepsilon$ sia negativo, risulta che $H'(y) < 0$ in $B_{\delta_\varepsilon}(0)$, con $y \neq 0$. Per il teorema di Liapunov, 0 è asintoticamente stabile. ■

Ne segue la seconda parte del Teorema di Perron.

Proposizione 5.4.2. Se esiste un autovalore di A con parte reale positiva, allora 0 è instabile per il sistema (5.2).

5.5 Stabilità e loro applicazioni

1. Pendolo semplice. Consideriamo ora l'equazione del moto del pendolo semplice di lunghezza

$$\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin(\theta), \quad (5.9)$$

dove θ è l'angolo tra il pendolo e il verticale e g (l'accelerazione gravitazionale alla superficie della Terra) e ℓ (la lunghezza del pendolo) sono due costanti positive. Moltiplicando da $d\theta/dt$ e integrando rispetto a θ arriviamo all'equazione di energia

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{g}{\ell} (\cos \theta - \cos a),$$

dove a è l'angolo positivo per cui $(d\theta/dt) = 0$. Nella figura tracciamo le orbite chiuse, le orbite eterocliniche (collegando i punti di sella) e le orbite aperte. Il periodo T delle orbite chiuse ha la forma

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{-a}^a \frac{d\theta}{\sqrt{2g(\cos \theta - \cos a)/\ell}} \\ &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^a \frac{d\theta}{\sqrt{4(\sin^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}\theta)}} \\ &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \cos \phi d\phi}{\cos \frac{1}{2}\phi \sqrt{4(\sin^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}a \sin^2 \phi)}} \\ &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\cos \frac{1}{2}\phi} = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} K(\sin^2 \frac{1}{2}a) \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}a^2 + O(a^4) \right), \end{aligned}$$

dove

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \phi}}, \quad 0 \leq m < 1,$$

si dice l'integrale ellittico completo di prima specie [1, 17.3.1]. Si osservi che abbiamo applicato la sostituzione $\sin \frac{1}{2}\theta = \sin \frac{1}{2}a \sin \phi$.

Applichiamo ora il teorema di Liapunov. Riformulando l'equazione del moto del pendolo nel sistema dinamico

$$\begin{cases} \theta_1' = \theta_2, \\ \theta_2' = -(g/\ell) \sin \theta_1, \end{cases}$$

e ponendo

$$H(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}\theta_2^2 + (g/\ell)[1 - \cos \theta_1],$$

otteniamo $H(\theta_1, \theta_2) > 0$ per $(0, 0) \neq (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ e $H'(t) = 0$. Quindi $(0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile, che non è asintoticamente stabile.

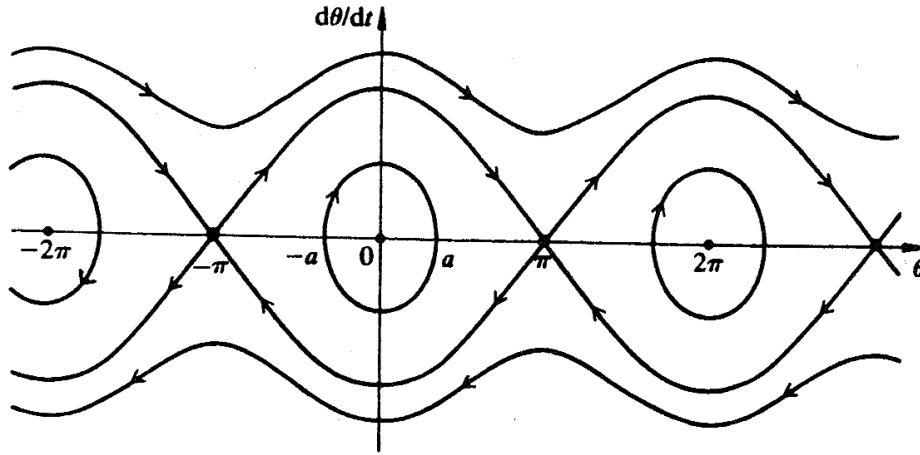


Figura 5.7: Diagramma delle fasi del pendolo nel piano $(\theta, \frac{d\theta}{dt})$.

Spesso il sistema (5.9) viene linearizzato nel seguente modo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta. \quad (5.10)$$

In tal caso la (5.10) si trasforma nel sistema dinamico

$$\begin{cases} \theta'_1 = \theta_2, \\ \theta'_2 = -(g/\ell)\theta_1, \end{cases}$$

con funzione di Liapunov

$$H(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}\theta_2^2 + (g/2\ell)\theta_1^2.$$

Siccome $H(\theta_1, \theta_2) > 0$ per $(0,0) \neq (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ e $H'(t) = 0$, l'origine $(0,0)$ è un punto di equilibrio stabile, che non è asintoticamente stabile.

2. Pendolo semplice vincolato ad un piano che subisce una rotazione costante. In tal caso

$$\ell \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin(\theta) + \frac{1}{2}\ell\omega^2 \sin(2\theta),$$

dove θ è l'angolo tra il pendolo e il verticale, g è l'accelerazione di gravità, ℓ la lunghezza del pendolo e ω la velocità angolare. Scriviamo l'equazione del moto nella forma

$$\begin{cases} \theta'_1 = \theta_2, \\ \theta'_2 = -(g/\ell) \sin(\theta_1) + \frac{1}{2}\omega^2 \sin(2\theta_1). \end{cases}$$

Nei punti di equilibrio (θ_1, θ_2) abbiamo $\theta_2 = 0$ e

$$\sin(\theta_1) \left\{ -\frac{g}{\ell} + \omega^2 \cos(\theta_1) \right\} = 0.$$

Quindi i punti di equilibrio sono $(\theta_0, 0)$ per $\sin \theta_0 = 0$ oppure per $\cos \theta_0 = (g/\ell\omega^2)$.

Per studiare l'andamento delle orbite intorno all'origine introduciamo la funzione di Liapunov

$$\begin{aligned} H(\theta_1, \theta_2) &= \frac{1}{2}\theta_2^2 + (g/\ell)[1 - \cos \theta_1] + \frac{1}{4}\omega^2[\cos(2\theta_1) - 1] \\ &= \frac{1}{2}\theta_2^2 + (g/\ell)[1 - \cos \theta_1] - \frac{1}{2}\omega^2[1 - \cos \theta_1][1 + \cos \theta_1] \\ &= \frac{1}{2}\theta_2^2 + [1 - \cos \theta_1] \left\{ \frac{g}{\ell} - \frac{1}{2}\omega^2[1 + \cos \theta_1] \right\} \\ &\geq \frac{1}{2}\theta_2^2 + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2 \right) [1 - \cos \theta_1] \geq 0, \end{aligned}$$

dove $(g/\ell) \geq \omega^2$. Allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(\theta_1(t), \theta_2(t)) &= \theta_2\dot{\theta}_2 + \left\{ \frac{g}{\ell} \sin \theta_1 - \frac{1}{2}\omega^2 \sin(2\theta_1) \right\} \dot{\theta}_1 \\ &= \left\{ \dot{\theta}_2 + \frac{g}{\ell} \sin \theta_1 - \frac{1}{2}\omega^2 \sin(2\theta_1) \right\} \dot{\theta}_1 = 0. \end{aligned}$$

Quindi l'origine è un punto di equilibrio stabile se $(g/\ell) \geq \omega^2$.

3. Oscillazioni smorzate e fenomeno della risonanza. Abbiamo già visto, nel capitolo precedente, l'oscillatore armonico con attrito. Ora, consideriamo l'equazione che modella un sistema meccanico, in cui le forze in gioco sono rappresentate da una forza elastica $(-ky)$, da un attrito proporzionale alla velocità del sistema $(-hy')$ e da una sollecitazione esterna, dipendente dal tempo $(F(t))$. Sia, cioè, l'equazione

$$my'' = -ky - hy' + F(t), \quad m \neq 0.$$

In un primo momento, calcoliamo l'integrale generale del sistema meccanico, sul quale, oltre alla forza di tipo elastico, agisce una resistenza di tipo viscoso, ossia proporzionale alla velocità, che, come vedremo, tenderà a smorzare o, addirittura, ad eliminare le oscillazioni del moto. Quindi, l'equazione del moto è data da

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0,$$

dove $\delta = \frac{h}{2m}$. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0,$$

che presenta due radici

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}.$$

Analizziamo i seguenti casi:

- i) $\delta > \omega$, ovvero la resistenza è elevata. Le radici, λ_1, λ_2 , risultano essere reali negative e distinte. L'integrale generale è della forma

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

dove c_1, c_2 sono due costanti arbitrarie. Il moto non è oscillatorio.

- ii) $\delta = \omega$. Allora risulta che $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta < 0$ e l'integrale generale è della forma

$$\varphi(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\delta t},$$

dove c_1, c_2 sono due costanti arbitrarie. Il moto non è oscillatorio.

- iii) $\delta < \omega$. Allora risulta che

$$\lambda_1 = -\delta + i\nu, \quad \lambda_2 = -\delta - i\nu,$$

dove $\nu = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$. L'integrale generale è della forma

$$\varphi(t) = A e^{-\delta t} \cos(\nu t + \alpha),$$

dove A e α sono due costanti arbitrarie. Il sistema esegue infinite oscillazioni attorno al centro con una frequenza $\nu = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ ed un'ampiezza $A e^{-\delta t}$, che diventa sempre più piccola con il trascorrere del tempo. Questo tipo di oscillazioni sono dette *smorzate*.

Ora, supponiamo che sul sistema agisca anche una forza esterna. L'equazione del moto non è più omogenea, ma è data da

$$m y'' = -k y - h y' + F(t), \quad m \neq 0.$$

Ponendo $f(t) = \frac{F(t)}{m}$, l'equazione diventa

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = f(t).$$

La soluzione generale è data da

$$y(t) = \varphi(t) + \psi(t),$$

dove $\varphi(t)$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata e $\psi(t)$ è la soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

Possiamo considerare una sollecitazione esterna del tipo

$$f(t) = B \cos(\gamma t).$$

Se $\gamma = 0$, la forza esterna è una costante B . Diversamente, essa risulta essere armonica con frequenza $\nu = \frac{\gamma}{2\pi}$.

Analizziamo i seguenti casi:

- i) Supponiamo che la resistenza sia nulla, ovvero $\delta = 0$. Allora un integrale particolare presenta la seguente forma:

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{B}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \gamma t & \gamma \neq \omega, \\ \frac{Bt}{2\omega} \sin \omega t & \gamma = \omega. \end{cases}$$

Alle oscillazioni descritte da $\varphi(t)$ si sovrappongono le *oscillazioni forzate* rappresentate da $\psi(t)$, di ampiezza costante (e uguale a $\frac{B}{\omega^2 - \gamma^2}$) se $\gamma \neq \omega$. Se, invece, si verifica che $\gamma = \omega$, l'ampiezza delle oscillazioni (uguale a $\frac{Bt}{2\omega}$) aumenta con il trascorrere del tempo: si ha il *fenomeno della risonanza*.

- ii) Sia $\delta > 0$. L'integrale particolare è dato da

$$\psi(t) = B\rho \cos[\gamma(t - r)],$$

dove $\rho = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\delta^2\gamma^2}}$ e $\tan(\gamma r) = \frac{2\gamma\delta}{\omega^2 - \gamma^2}$. Poiché l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, $\varphi(t)$, tende a zero al tendere di t all'infinito, dopo un moto iniziale transitorio, la situazione di regime è descritta dall'integrale $\psi(t)$. Il moto è armonico con ampiezza $B\rho$ (dove ρ è una funzione di γ) e periodo $\frac{2\pi}{\gamma}$. Quest'ultima compare quando la frequenza di eccitazione è quasi uguale a quella caratteristica ω . Se, invece, $\delta \geq \frac{\omega}{2}$, la funzione $\rho(\gamma)$ è decrescente e non si ha risonanza.

4. Modello preda-predatore di Lotka-Volterra. Dopo il primo conflitto mondiale, al largo del Mar Adriatico, si riscontrò una diminuzione di una determinata specie di pesci commestibili e un aumento del numero di predatori. La questione fu posta all'attenzione del matematico italiano Vito Volterra (1860-1940), che risolse il problema con il seguente modello divenuto celebre e già studiato precedentemente dal matematico polacco Lotka, in relazione ad un problema di cinetica chimica.

Indicando con $x = x(t)$ il numero di prede e con $y = y(t)$ il numero di predatori, Volterra considerò che il tasso relativo di crescita delle prede era

costante in assenza di predatori, ma decrescente linearmente con y ; il tasso relativo di diminuzione del numero di predatori era costante in assenza di prede, ma crescente linearmente con x . Il modello fu il seguente:

$$\begin{cases} \frac{x'}{x} &= a - by, \\ \frac{y'}{y} &= -c + dx, \end{cases}$$

dove $a, b, c, d > 0$. Poniamo $F(x, y) = ax - bxy$; $G(x, y) = -cy + ydx$. I punti di equilibrio sono le soluzioni del sistema $F(x, y) = G(x, y) = 0$, cioè $x = (c/d)$ e $y = (a/b)$. L'integrale primo del sistema è

$$E(x, y) = -c \log x + dx - a \log y + by.$$

Infatti, moltiplicando $(x'/x) = a - by$ per $(-c + dx)$ e $(y'/y) = -c + dx$ per $(a - by)$ e sottraendo termine a termine, si ottiene

$$\left(-\frac{c}{x} + d\right) x' - \left(\frac{a}{y} - b\right) y' = \frac{d}{dt} (-c \log x + dx - a \log y + by) = E'.$$

Poiché

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{c}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{a}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial(x, y)} = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{c}{x} + d = 0 \text{ per } x = \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad \frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{a}{y} + b = 0 \text{ per } y = \frac{a}{b},$$

E risulta essere strettamente convessa in \mathbb{R}^2 e il punto $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ il minimo globale per E . In particolare, considerando come integrale primo definito positivo

$$H(x, y) = E(x, y) - E\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right),$$

che, verificando le condizioni $H(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) = 0$, $H(x, y) > 0$ e $H'(x, y) \leq 0$, risulta essere una funzione di Liapunov, il punto di equilibrio del sistema è stabile, ma non asintoticamente. A questo sistema, dunque, non è possibile applicare il metodo di linearizzazione.

Gli insiemi di livello $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : E(x, y) = k, k > E(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})\}$ sono curve chiuse regolari che rinchiudono $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Il moto avviene nel senso antiorario. L'evoluzione della coppia $(x(t), y(t))$ è di periodo T , dipendente da k . Quindi, $x(0) = x(T)$ e $y(0) = y(T)$. Calcolando

$$\int_0^T \frac{x'}{x} dt = \log x(T) \Big|_0^T - \log x(0) \Big|_0^T = 0.$$

$$\int_0^T \frac{y'}{y} dt = \log y(T) - \log y(0) = 0.$$

$$0 = \int_0^T (a - by) dt = aT - b \int_0^T y dt,$$

da cui si ottiene $\frac{1}{T} \int_0^T y dt = \frac{a}{b}$;

$$0 = \int_0^T (-c + dx) dt = -cT + d \int_0^T x dt,$$

da cui si ottiene $\frac{1}{T} \int_0^T x dt = \frac{c}{d}$.

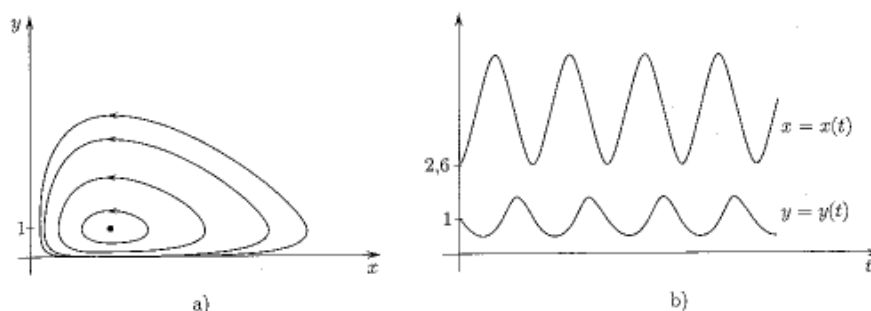


Figura 5.8: (a) Orbite del sistema di Lotka-Volterra corrispondenti ai dati iniziali $(0.5, 1)$, $(0.7, 1)$, $(1.4, 1)$ e $(2.6, 1)$. (b) Grafici delle soluzioni del sistemi di Lotka-Volterra con dati iniziali $(2.6, 1)$. Vedi [14, 5].

Il sistema preda-predatore di Lotka-Volterra descrive la competizione tra prede e predatori. Il numero dei predatori è y e quello di prede è x . Questa competizione è ciclica. In ogni periodo T (con T che dipende dalla curva di livello di E) l'aumento delle prede comporta una riduzione del numero di predatori e vice versa, ma in ogni periodo il numero medio di prede e quello di predatori non cambia. Nessuna delle due specie si può estinguere.

5.6 Stabilità dei sistemi dinamici discreti

Consideriamo il sistema dinamico discreto

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad (5.11)$$

dove $x_n \in \mathbb{R}^m$ per $n = 0, 1, 2, \dots$ e $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua. Allora l'insieme $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ si dice *traiettoria* o *orbita*. Un'orbita si chiama *p-ciclo* se $x_{n+p} = x_n$

per $n = 0, 1, 2, \dots$ ma $x_0 \notin \{x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$. Dunque p si intende il periodo minimale.

Un'orbita che consiste in un singolo punto si dice *punto di equilibrio*. In tal caso un tale punto X è soluzione dell'equazione $F(X) = X$. Nel caso di un p -ciclo esistono p punti diversi X_1, X_2, \dots, X_p tali che

$$F(X_1) = X_2, F(X_2) = X_3, F(X_3) = X_4, F(X_{p-1}) = F(X_p), F(X_p) = X_1.$$

In tal caso l'orbita consiste in tali p punti. Ovviamente, X_1, \dots, X_p sono punti di equilibrio dell'iterato p -esimo della F (cioè, della mappa F^p , dove $F^1(X) = F(X)$ e $F^p(X) = F(F^{p-1}(X))$).

Un punto di equilibrio X si dice *asintoticamente stabile* se esiste un intorno U di X tale che $x_n \rightarrow X$ esponenzialmente per ogni $x_0 \in U$. Il punto di equilibrio X si dice *stabile* se esiste un intorno U di X tale che ogni orbita con il punto iniziale $x_0 \in U$ è contenuta in U .

Un risultato fondamentale è il seguente teorema:

Teorema 5.6.1 (delle contrazioni). Supponiamo che esista una costante $\delta \in (0, 1)$ tale che

$$\|F(\xi) - F(\eta)\| \leq \delta \|\xi - \eta\|, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^m.$$

Allora il sistema dinamico (5.11) ha un singolo punto di equilibrio e quel punto è asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Per qualunque $x_0 \in \mathbb{R}^m$ si consideri l'orbita $\{x_n\}_{n=0}^\infty$. Allora

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq (\delta^{n+p-1} + \delta^{n+p-2} + \dots + \delta^n) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{\delta^n}{1 - \delta} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Di conseguenza, $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ è una successione di Cauchy in \mathbb{R}^m e quindi ha limite, X . Facendo tende il pedice p all'infinito, risulta

$$\|x_n - X\| \leq \frac{\delta^n}{1 - \delta} \|x_1 - x_0\|.$$

Inoltre, facendo tende n all'infinito nella (5.11) risulta $X = F(X)$, cioè X è un punto di equilibrio che è ovviamente asintoticamente stabile. L'unicità del punto di equilibrio si dimostra in modo banale. ■

Se la mappa F è differenziabile in un intorno del punto di equilibrio X e $\|F'(X)\| < 1$, allora la F è una contrazione (per qualsiasi δ tra $\|F'(X)\|$ e 1) in un opportuno intorno di X . Di conseguenza, X è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Se $F : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e X_1, \dots, X_p costituiscono un p -ciclo della F , allora

$$(F^p)'(X_1) = (F^p)'(X_2) = \dots = (F^p)'(X_p).$$

Di conseguenza, se X_1 è un punto asintoticamente stabile della F^p , allora lo sono anche gli altri punti del p -ciclo. Tutto quanto segue applicando la regola di derivazione di una funzione composta p volte in seguito:

$$\begin{aligned} (F^p)'(X) &= F'(F^{p-1}(X))(F^{p-1})'(X) = F'(F^{p-1}(X))F'(F^{p-2}(X))(F^{p-2})'(X) \\ &= F'(F^{p-1}(X))F'(F^{p-2}(X)) \dots F'(F(X))F'(X). \end{aligned}$$

Conclusione: Il p -ciclo $\{X_1, \dots, X_p\}$ è asintoticamente stabile se

$$|F'(X_1)F'(X_2) \dots F'(X_p)| < 1.$$

1. Metodo di Newton-Raphson. Questo metodo per determinare gli zeri di una funzione f di classe C^2 risulta nel seguente sistema dinamico:²

$$x_{n+1} = F(x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (5.12)$$

Osserviamo ora che

$$F'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Quindi se $f(X) = 0$ e $f'(X) \neq 0$, esiste un intorno U di X in cui $|F'(x)| < 1$. In tal caso X è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Dimostriamo ora che la convergenza allo zero X è quadratica. Infatti, scrivendo la (5.12) nella forma

$$x_{n+1} - X = [x_n - X] - \frac{f(x_n) - f(X)}{f'(x_n)},$$

appliciamo il teorema del valor medio e troviamo ξ tra x_n e X tale che $f(x_n) - f(X) = f'(\xi)[x_n - X]$. Dunque,

$$x_{n+1} - X = \frac{x_n - X}{f'(x_n)} [f'(x_n) - f'(\xi)].$$

²La tangente al grafico della funzione f nel punto $(x_n, f(x_n))$ deve passare per il punto $(x_{n+1}, 0)$.

Applicando il teorema del valor medio alla f' troviamo η tra x_n e ξ tale che $f'(x_n) - f'(\xi) = f''(\eta)[x_n - \xi]$. Dunque,

$$x_{n+1} - X = \frac{f''(\eta)}{f'(x_n)}[x_n - X][x_n - \xi].$$

Essendo $M = \max\{|f''(z)|\}$ e $m = \min\{|f'(z)|\}$, otteniamo la stima

$$\|x_{n+1} - X\| \leq \frac{M}{m} \|x_n - X\|^2.$$

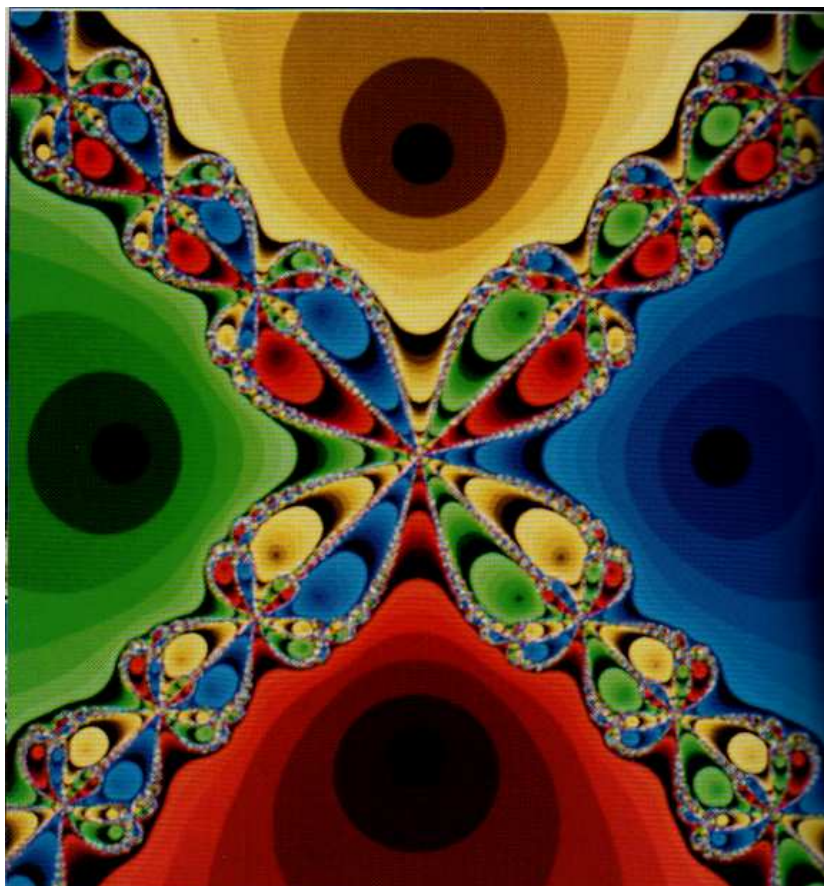


Figura 5.9: Gli attrattori provenienti dall'applicazione del metodo di Newton-Raphson alla funzione complessa $f(z) = z^4 - 1$ (vedi [10]).

Il metodo di Newton-Raphson può anche essere enunciato nel piano complesso. Sia f una funzione analitica intera.³ Allora gli zeri complessi della f

³Cioè: La funzione f ha un numero infinito di derivate successive nel piano complesso e la serie di potenze $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} [f^{(j)}(z_0)/j!](z - z_0)^j$ è assolutamente convergente in ogni $z \in \mathbb{C}$.

possono, in principio, essere trovati dal sistema dinamico

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}.$$

In generale, ne esce un caldrone di attrattori complicati. Per esempio, per $f(z) = z^4 - 1$ abbiamo attrattori attorno agli zeri ± 1 e $\pm i$.

2. Mappa logistica. Consideriamo la cosiddetta *mappa logistica*

$$x_{n+1} = F(x_n) \stackrel{\text{def}}{=} rx_n(1 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (5.13)$$

dove $0 \leq x_n \leq 1$ e r è una costante positiva. Per far appartenere x_{n+1} all'intervallo $[0, 1]$ per qualsiasi $x_n \in [0, 1]$, bisogna limitarsi alle costanti r tali che $0 \leq r \leq 4$. La mappa logistica (5.13) ha i due punti di equilibrio $X = 0$ e, per $1 < r \leq 4$, $X = ((r - 1)/r)$, per cui $F(X) = X$. Ponendo $F(x) = rx(1 - x)$ e $x'_n = x_n - X$ si ha

$$X + x'_{n+1} = F(X + x'_n) = F(X) + x'_n F'(X) + O([x'_n]^2), \quad x'_n \rightarrow 0,$$

dove $F(X) = X$. Quindi

$$x'_{n+1} = x'_n F'(X) + O([x'_n]^2), \quad x'_n \rightarrow 0,$$

Dunque, se $|F'(X)| < 1$, allora risulta la stabilità asintotica della mappa logistica (nel senso che $x_n \rightarrow X$ se $n \rightarrow +\infty$, qualunque sia x_0). Se $|F'(X)| \leq 1$, ne risulta la sua stabilità (nel senso che x_n rimane vicino ad X).

Per $X = 0$ abbiamo $F'(X) = r(1 - 2X) = r$. Quindi $|F'(X)| < 1$ se e solo se $0 \leq r < 1$. In altre parole, per $0 \leq r < 1$ abbiamo $x_n \rightarrow 0$ qualunque sia $x_0 \in [0, 1]$. Quindi il punto di equilibrio $X = 0$ è asintoticamente stabile se $0 \leq r < 1$, e stabile se $0 \leq r \leq 1$.

Per $X = ((r - 1)/r)$ abbiamo $F'(X) = 2 - r$. Quindi $|F'(X)| < 1$ se e solo se $1 < r < 3$. In altre parole, per $1 < r < 3$ abbiamo $x_n \rightarrow ((r - 1)/r)$ qualunque sia $x_0 \in (0, 1)$. Per $x_0 = 0$ oppure $x_0 = 1$ abbiamo $x_n = 0$ per $n \geq 2$. Quindi il punto $X = ((r - 1)/r)$ è asintoticamente stabile se $1 < r < 3$ e stabile se $1 \leq r \leq 3$.⁴

Consideriamo ora

$$\begin{aligned} F^2(X) &= F(F(X)) = r[rX(1 - X)](1 - [rX(1 - X)]) \\ &= r^2 X(1 - X)(1 - rX + rX^2). \end{aligned}$$

⁴Per $r = 2$ la (5.13) ha la soluzione esplicita $x_n = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2x_0)^{2^n}]$. Tale soluzione tende a $\frac{1}{2}$ per $n \rightarrow +\infty$ se e solo se $0 < x_0 < 1$.

Quindi $X = F^2(X)$ se e solo se

$$X \in \left\{ 0, \frac{r-1}{r}, \frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r} \sqrt{(r+1)(r-3)} \right\}.$$

Le altre due soluzioni dell'equazione $F^2(X) = X$ appartengono all'intervallo $[0, 1]$ se e solo se $3 \leq r \leq 4$.

Si verifica facilmente che

$$F\left(\frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r} \sqrt{(r+1)(r-3)}\right) = \frac{r+1}{2r} \mp \frac{1}{2r} \sqrt{(r+1)(r-3)}.$$

Inoltre,

$$(F^2)'(X) = F'(F(X))F'(X) = r^2(1 - 2F(X))(1 - 2X).$$

Per $X = \frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r} \sqrt{(r+1)(r-3)}$ troviamo $(F^2)'(X) = -(r-1)^2 + 5$ il quale verifica $|(F^2)'(X)| < 1$ se e solo se $3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$. In altre parole, i punti di equilibrio $X = \frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r} \sqrt{(r+1)(r-3)}$ del secondo iterato della mappa logistica sono asintoticamente stabili se e solo se $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ e stabili se e solo se $3 \leq r \leq 1 + \sqrt{6}$.

La sperimentazione numerica condotta da Feigenbaum (1978) ha portato ai seguenti risultati:

- a. Per $0 \leq r < 1$ esiste un singolo punto di equilibrio ($X = 0$) che è asintoticamente stabile.
- b. Per $1 < r < 3$ esistono un secondo punto di equilibrio ($X = ((r-1)/r)$) che è asintoticamente stabile.
- c. Per $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ esistono due punti di equilibrio della mappa F^2 ($X = \frac{r+1}{2r} \pm \frac{1}{2r} \sqrt{(r+1)(r-3)}$) che sono asintoticamente stabili. La mappa logistica ha un 2-ciclo asintoticamente stabile.
- d. Più generalmente, esiste una successione crescente $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ nell'intervallo $[0, 4)$ (dove $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 1 + \sqrt{6}$) tale che per $\alpha_{k-1} < r < \alpha_k$ la mappa logistica ha un 2^{k-2} -ciclo asintoticamente stabile.
- e. Il rapporto delle lunghezze degli intervalli dei valori di r per cui esiste un 2^{k-2} -ciclo e per cui esiste un 2^{k-1} -ciclo della mappa logistica, hanno un rapporto che tende alla cosiddetta costante di Feigenbaum (4.669202 incirca). In altre parole, la costante di Feigenbaum è il seguente limite:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{\alpha_k - \alpha_{k-1}}.$$

Si ha $\alpha_4 \approx 3.54$. Purtroppo $\alpha_k \rightarrow 3.569946$ (incirca) se $k \rightarrow +\infty$.

- f. Oltre il valor limite di 3.569946 ci sono intervalli di r per cui l'iterazione della mappa logistica esibisce un comportamento caotico. Ci sono anche intervalli di r per cui esistono un 3-ciclo, un 6-ciclo, un 12-ciclo, ecc.

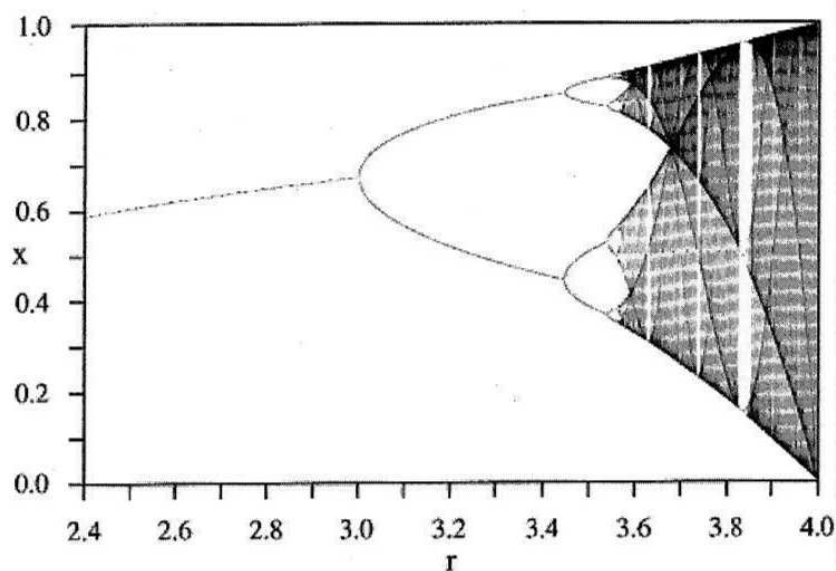


Figura 5.10: Diagramma di biforcazione della mappa logistica.

3. Lo shift di Bernoulli. Sia $\sigma : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ definita da

$$\sigma(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Consideriamo il sistema dinamico discreto

$$\theta_{n+1} = \sigma(\theta_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.14)$$

Nel sistema binario (in cui si rappresentano i numeri tramite le due cifre 0 e 1) ogni numero $\theta \in [0, 1)$ ha la rappresentazione unica

$$\theta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{2^j},$$

dove $d_j \in \{0, 1\}$. In tal caso $0.d_1d_2d_3\dots$ è la rappresentazione binaria del numero θ . Si verifica facilmente che

$$\sigma(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_{j+1}}{2^j}.$$

In altre parole, l'evoluzione del sistema dinamico (5.14) consiste nell'allontanamento della prima cifra dallo sviluppo binario.

Lo sviluppo binario di un numero $\theta \in [0, 1)$ è finito (nel senso che tutte le cifre tranne un numero finito, m , sono uguali a zero) se e solo se $\theta = (q/2^m)$ per opportuni $m = 1, 2, 3, \dots$ intero e $q = 1, 3, 5, \dots, 2^m - 1$ dispari. In tal caso

$$\sigma^m(\theta) = 0.$$

D'altra parte, se θ è un numero razionale (ma non del tipo precedente), da un certo punto in poi il suo sviluppo binario sarà periodico: $\theta_{n+p} = \theta_n$ per $n \geq s$. In tal caso

$$\{\theta_s, \theta_{s+1}, \dots, \theta_{s+p-1}\}$$

è un p -ciclo. Infine, se θ è irrazionale, il suo sviluppo binario è aperiodico.

Presentiamo ora alcuni esempi numerici.

$$\theta_0 = \frac{1}{3}, \quad \theta_1 = \frac{2}{3}, \quad \theta_2 = \frac{1}{3}; \quad (2\text{-ciclo})$$

$$\theta_0 = \frac{1}{7}, \quad \theta_1 = \frac{3}{7}, \quad \theta_2 = \frac{6}{7}, \quad \theta_3 = \frac{5}{7}, \quad \theta_4 = \frac{3}{7}; \quad (3\text{-ciclo})$$

$$\theta_0 = \frac{1}{5}, \quad \theta_1 = \frac{2}{5}, \quad \theta_2 = \frac{4}{5}, \quad \theta_3 = \frac{3}{5}, \quad \theta_4 = \frac{1}{5}. \quad (4\text{-ciclo})$$

L'unico punto di equilibrio della mappa σ è lo zero. Purtroppo, lo zero può essere approssimato da numeri irrazionali (per esempio, $\sqrt{2}/2n$) e quindi lo zero è un punto di equilibrio instabile. Dallo stesso ragionamento segue che tutti i p -cicli sono instabili. Ciò implica un comportamento caotico della mappa σ .

4. Mappa nel piano complesso. Consideriamo ora la mappa

$$z_{n+1} = \mathbf{F}(z_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (5.15)$$

Ponendo $z = x + iy$, potremmo convertire la (5.15) nel sistema dinamico

$$\begin{cases} x_{n+1} = F_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = F_2(x_n, y_n), \end{cases} \quad (5.16)$$

dove abbiamo sfruttato l'equivalenza tra il piano complesso e \mathbb{R}^2 . Per esempio, per $\mathbf{F}(z) = z^2$ otteniamo al posto della (5.16)

$$\begin{cases} x_{n+1} = [x_n]^2 - [y_n]^2, \\ y_{n+1} = 2x_n y_n. \end{cases}$$

Se la \mathbf{F} è una funzione analitica e Z è un punto di equilibrio (cioè, $\mathbf{Z} = Z$), allora Z è asintoticamente stabile se $|\mathbf{F}'(Z)| < 1$ e instabile se $|\mathbf{F}'(Z)| > 1$.

Quest'ultimo sistema dinamico ha due punti di equilibrio, ambedue stabili: 0 e ∞ (in \mathbb{C}). Siccome $z_n = [z_0]^{2^n}$ determina l'orbita con punto iniziale z_0 , si ha $z_n \rightarrow 0$ per $|z_0| < 1$ e $z_n \rightarrow \infty$ per $|z_0| > 1$. Il cerchio unitario viene trasformato in se stesso. Le radici dell'unità primitive di ordine p conducono ad un p -ciclo.⁵ Tutti gli altri punti del cerchio unitario producono un'orbita aperiodica che è infatti densa nel cerchio.

Consideriamo il caso $\mathbf{F}(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. In tal caso i punti di equilibrio sono $Z = \pm 1$ (e $Z = \infty$). Siccome $\mathbf{F}'(\pm 1) = 0$, i punti di equilibrio $Z = \pm 1$ sono ambedue stabili. Il semipiano destro aperto ($\operatorname{Re}(z) > 0$) è l'attrattor per $Z = 1$, mentre quello sinistro ($\operatorname{Re}(z) < 0$) è l'attrattor per $Z = -1$. L'asse immaginario andrà a finire a $Z = \infty$ dopo uno (per $z_0 = 0$) o due (per $z_0 \neq 0$) passaggi. Siccome ogni numero immaginario può essere approssimato da numeri complessi non immaginari, il punto di equilibrio $Z = \infty$ è instabile.

Consideriamo ora la mappa più interessante

$$f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty,$$

dove f è un polinomio oppure una funzione razionale, studiata da Pierre Fatou (1878-1929), Gaston Julia (1893-1978) e Benoît Mandelbrot (1924-2010). Mandelbrot (1980) è stato uno dei primi a studiare tali problemi al computer. Il problema studiato di più è stato la mappa

$$f(z) = z^2 + c, \tag{5.17}$$

dove $c \in \mathbb{C}$ è una costante, in particolare il sistema dinamico di equazione

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = [z_n]^2 + c. \tag{5.18}$$

Per questa mappa si definisce *insieme di Mandelbrot* l'insieme M di tutti i numeri complessi c per cui la successione $\{z_n\}_{n=0}^\infty$ è limitata. In tal caso $\{z_n\}_{n=0}^\infty$ può essere suddivisa in alcune sottosuccessioni aventi come limite uno degli zeri dell'equazione polinomiale $z = f^n(z)$ di grado 2^n . Per $c = \pm i$, la successione $\{z_n\}_{n=0}^\infty$ consiste in 4 punti, poichè

$$0 \xrightarrow{F} \pm i \xrightarrow{F} -1 \pm i \xrightarrow{F} \mp i \xrightarrow{F} -1 \pm i \xrightarrow{F} \mp i \xrightarrow{F} \dots,$$

quindi $\{i, -i\} \subset M$. D'altra parte, per $c = 1$ abbiamo $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_n \geq 1$ per $n = 1, 2, 3, \dots$, e quindi $z_{n+1} \geq z_n + 1 > z_n$, che implica che $z_n \rightarrow +\infty$. In altre parole, $1 \notin M$.

⁵ z se dice radice dell'unità primitiva se $z^p = 1$ e $1 \notin \{z, z^2, z^3, \dots, z^{p-1}\}$.

Per $c > \frac{1}{4}$, abbiamo

$$z_{n+1} - z_n = (z_n - \frac{1}{2})^2 + (c - \frac{1}{4}) > 0,$$

implicando la monotonia stretta della successione $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ e quindi l'esistenza (finita o infinita) del limite $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$. Siccome $z = z^2 + c$, risulterebbe $(z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - c < 0$ e dunque $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ se z fosse finito. Di conseguenza, $z_n \rightarrow +\infty$ e quindi $(\frac{1}{4}, +\infty) \cap M = \emptyset$.

Per $c = \frac{1}{4}$ abbiamo $z_{n+1} = [z_n]^2 + \frac{1}{4}$. Quindi: Se $\frac{1}{4} < z_n < \frac{1}{2}$, allora $\frac{1}{4} < z_{n+1} < \frac{1}{2}$, mentre $z_{n+1} - z_n = (z_n - \frac{1}{2})^2 > 0$. Di conseguenza, $z_n \rightarrow \frac{1}{2}$, la soluzione dell'equazione $z = z^2 + \frac{1}{4}$. Di conseguenza, $\frac{1}{4} \in M$. Inoltre, per $c = -2$ abbiamo $z_0 = 0, z_1 = -2, z_2 = z_3 = \dots = 2$, e quindi $-2 \in M$. Per dimostrare che $(-\infty, -2)$ non interseca M , prendiamo $c < -2$. In tal caso $z_0 = 0, z_1 = c < -2, z_2 > (-2)^2 - 2 = 2, z_3 > (2)^2 - 2$, dunque $z_n > 2$ per $n = 2, 3, 4, \dots$. Inoltre, $z_{n+1} - z_n = (z_n - 2)(z_n + 1) > 0$ per $n = 2, 3, 4, \dots$. Quindi $\{z_n\}_{n=2}^{\infty}$ è strettamente crescente con limite $+\infty$ (poichè nel caso contrario il limite deve essere uno degli zeri 2 e -1 dell'equazione $z = z^2 - 2$, un'impossibilità). Di conseguenza, $c \notin M$ e quindi $(-\infty, -2) \cap M = \emptyset$.

I punti fissi della (5.17) sono $z_{\pm} = \frac{1}{2}[1 \pm \sqrt{1 - 4c}]$. In questi due punti abbiamo $f'(z_{\pm}) = 2z_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1 - 4c}$. Affinchè uno dei punti fissi z_{\pm} sia attrattivo, è necessario e sufficiente che $|f'(z_{\pm})| < 1$ per almeno uno dei z_{\pm} , oppure: che $\sqrt{1 - 4c}$ si trova all'interno di uno dei due dischi di raggio 1 e centro ± 1 . Ponendo $w = 1 \pm \sqrt{1 - 4c}$, risulta $c = \frac{1}{4}[1 - (w - 1)^2]$. In altre parole, la mappa (5.17) ha un punto fisso attrattivo se e solo se

$$c \in \{ \frac{1}{4}[1 - (w - 1)^2] : |w| < 1 \}.$$

Si vede facilmente che la frontiera di questa regione è una cardioide⁶ con il cuspidi a $\frac{1}{4}$ e l'estremo sinistro a $-\frac{3}{4}$. Di conseguenza, questa regione più la sua frontiera sono contenute nell'insieme di Mandelbrot.

Iterando la (5.18), risulta $z_{n+2} = [z_n]^4 + 2c[z_n]^2 + c(c+1)$. Quindi i punti fissi del secondo iterato f^2 sono gli zeri del polinomio

$$p(z) = z^4 + 2cz^2 - z + c(c+1) = (z^2 - z + c)(z^2 + z + c + 1);$$

dunque i punti di periodo 2 sono $z_{\pm}^{[2]} = \frac{1}{2}[-1 \pm \sqrt{1 - 4(c+1)}]$. Adesso osserviamo che $(f^2)'(z) = f'(f(z))f'(z) = 4zf(z) = 4z(z^2 + c)$. Sostituendo $z = z_{\pm}^{[2]}$, si ha $(f^2)'(z_{\pm}^{[2]}) = 4(c+1)$. Dunque $\{z_+^{[2]}, z_-^{[2]}\}$ è un attractor se e solo se c appartiene al disco $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta + 1| < \frac{1}{4}\}$. In altre parole, il disco chiuso

⁶Si ha $|c(\theta)| = \frac{1}{4}\sqrt{5 - 4\cos\theta}$, dove $\theta = \arg(c)$. L'area rinchiusa è $5\pi/16$. La lunghezza della cardioide vale $3K(\frac{2}{3}\sqrt{2})$, dove $K(m)$ è l'integrale ellittico di prima specie [1, 17.3.1].

di centro -1 e raggio $\frac{1}{4}$ (che tocca la cardioida nel punto $-\frac{3}{4}$) è contenuto nell'insieme di Mandelbrot. Abbiamo dimostrato che

$$[-\frac{5}{4}, \frac{1}{4}] \subset M \cap \mathbb{R} \subset [-2, \frac{1}{4}].$$

Si può infatti dimostrare che $M \cap \mathbb{R} = [-2, \frac{1}{4}]$.

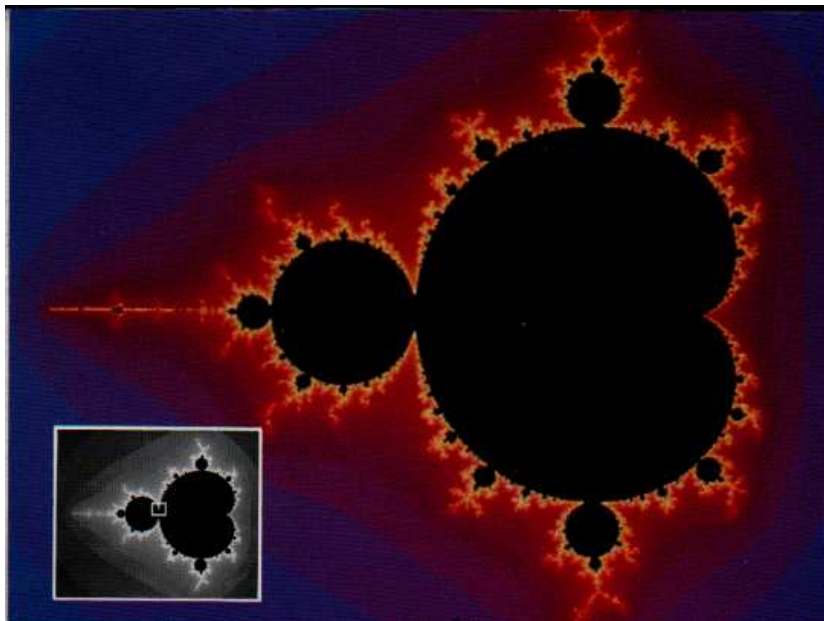


Figura 5.11: L'insieme di Mandelbrot per la mappa $f(z) = z^2 + c$ (vedi [10]). Esso contiene il disco di centro -1 e raggio $\frac{1}{4}$ attaccato, nel punto $z = \frac{3}{4}$, alla regione racchiusa dalla cardioida $\{\frac{1}{4}[1 - (w - 1)^2] : |w| = 1\}$.

5. Esempio di una mappa cubica. Per il parametro $a \in \mathbb{R}$ consideriamo il sistema dinamico

$$x_{n+1} = f(x_n) \stackrel{\text{def}}{=} ax_n - [x_n]^3. \quad (5.19)$$

Allora i punti fissi sono 0 per $a \leq 1$ e $\{0, \pm\sqrt{a-1}\}$ per $a > 1$. Siccome $F'(x) = a - 3x^2$, risultano $f'(0) = a$ e, per $a > 1$, $f'(\pm\sqrt{a-1}) = 3 - 2a$. Quindi il punto fisso $z = 0$ è stabile per $a < 1$ e instabile per $a > 1$. I punti fissi $\pm\sqrt{a-1}$ sono stabili per $1 < a < 2$ e instabili per $a > 2$. Inoltre,

$$\begin{aligned} F^2(x) &= a(ax - x^3) - (ax - x^3)^3 \\ &= x \{x^8 - 3ax^6 + 3a^2x^4 - (a^3 + a)x^2 + a^2\}. \end{aligned}$$

Quindi $F^2(x) = x$ se e solo se

$$\underbrace{x(x^2 - a + 1)}_{\text{punti fissi}}(x^2 - a - 1)(x^4 - ax^2 + 1) = 0.$$

Abbiamo $f(\pm\sqrt{a+1}) = \pm\sqrt{a+1}$ e $f'(\pm\sqrt{a+1}) = -3 - 2a < -1$ per $a > -1$; dunque il 2-ciclo $\{\pm\sqrt{a+1}\}$ è instabile. Inoltre, per $a > 2$ si ha

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}}\right) = \pm\sqrt{\frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4}}{2}},$$

dove ci sono due coppie di segno indipendenti.

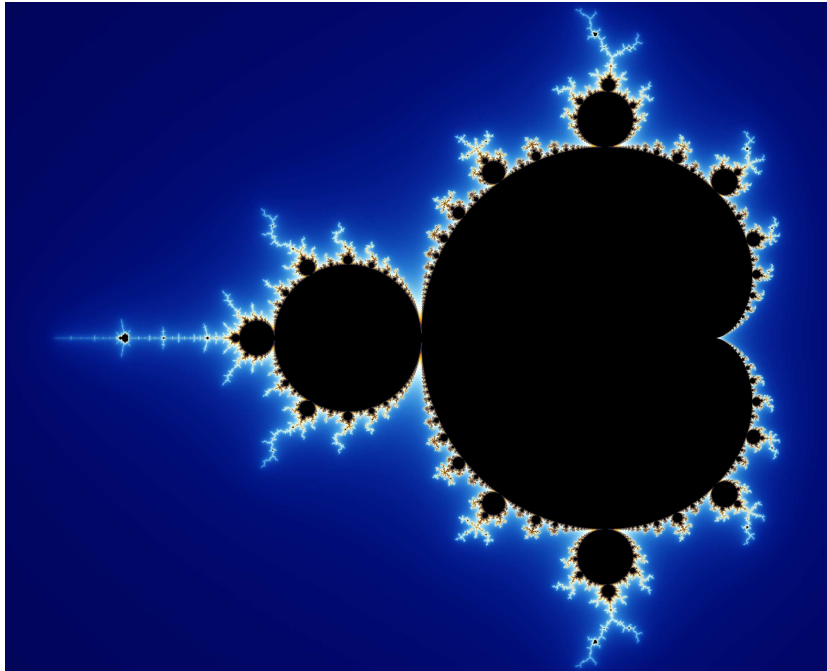


Figura 5.12: Un'altra rappresentazione dell'insieme di Mandelbrot per la mappa $f(z) = z^2 + c$ (vedi Wikipedia).

Capitolo 6

Biforcazioni e cicli-limite

In questo capitolo discutiamo il teorema di Poincaré-Bendixson che costituisce uno strumento basilare per lo studio dei sistemi dinamici in \mathbb{R}^2 e fornisce un criterio valido per individuare i cicli-limite nel piano. Successivamente, applichiamo questo teorema all'oscillatore di Van der Pol. Infine discutiamo il modello logistico di Verhulst e l'oscillatore di Lorentz.

6.1 Teorema di Poincaré-Bendixson

Consideriamo il sistema

$$x' = f(x), \quad x = (x_1, x_2), \quad f = (f_1, f_2) \in C^1(\Omega : \mathbb{R}^2), \quad (6.1)$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme aperto.

Teorema 6.1.1 (Criterio di Bendixson). Sia Ω un aperto semplicemente connesso. Se

$$\operatorname{div}(f)(x) = \partial_{x_1} f_1(x) + \partial_{x_2} f_2(x)$$

non cambia il segno in Ω e non è identicamente nulla in ogni sottoinsieme aperto di Ω , allora il sistema (6.1) non ammette soluzioni periodiche.

Nel caso in cui f_1 dipende soltanto da x_2 e f_2 soltanto da x_1 abbiamo $\operatorname{div}(f) \equiv 0$ in Ω , cioè non si verificano le ipotesi del Criterio di Bendixson. Ciò vale in particolare per il pendolo semplice. Nel caso del sistema di Lotka-Volterra la divergenza della f cambia segno in ogni intorno del punto di equilibrio. In ambedue esempi esiste un intorno del punto di equilibrio che consiste in cicli.

D'altra parte, l'oscillatore armonico con attrito (4.2) fornisce un'applicazione del criterio di Bendixson. In tal caso $\operatorname{div}(f) = -k < 0$. Di conseguenza non ne esiste alcuna soluzione periodica.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $t \rightarrow \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ sia una soluzione periodica del sistema (6.1), con periodo $T > 0$. Indichiamo con C la curva $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e con D il dominio delimitato da C . Poiché Ω è semplicemente connesso, $D \subset \Omega$. Per il Teorema di Gauss-Green e per le ipotesi date, si ha

$$\begin{aligned} 0 &\neq \iint_D \underbrace{\left(\partial_{x_1} f_1(x) + \partial_{x_2} f_2(x) \right)}_{\text{non cambia segno}} dx_1 dx_2 = \oint_{+C} (-f_2(x) dx_1 + f_1(x) dx_2) \\ &= \int_0^T (-f_2(x(t))x_1'(t) + f_1(x(t))x_2'(t)) dt \\ &= \int_0^T (-f_2(x(t))f_1(x(t)) + f_1(x(t))f_2(x(t))) dt = 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

il che è assurdo. ■

Esempio 6.1. Consideriamo ora il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2, \\ \dot{y} = -y^3 + x^2. \end{cases}$$

I suoi punti di equilibrio seguono risolvendo le equazioni $x = y^2$ e $y^3 = x^2$, cioè: $(0, 0)$ [degenerato] e $(1, 1)$ [sella].¹ Abbiamo

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial}{\partial x}(-x + y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^3 + x^2) = -1 - 3y^2 < 0,$$

quindi non ci sono soluzioni periodiche.

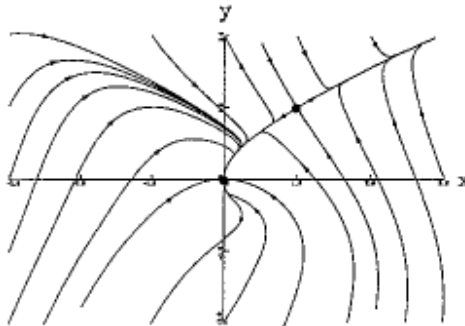


Figura 6.1: Orbite per un sistema dinamico con due punti di equilibrio [18].

¹Le linearizzazioni sono del tipo $\dot{z} = Az$, dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ per $(0, 0)$ e $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ per $(1, 1)$.

Indichiamo con $\varphi^+ = \varphi^+(x_0) = \{\varphi(t; x_0) : t \geq 0\}$ una semi-orbita positiva.

Definizione 6.1.1. Un punto P è detto *punto limite positivo* per φ^+ se esiste una successione monotona crescente $t_k \rightarrow +\infty$ tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k, x_0) = P$. Indichiamo l'insieme di tutti i punti limite positivi con $L(\varphi^+)$.

Teorema 6.1.2. L'insieme $L(\varphi^+)$ è *invarianti*, cioè

$$P \in L(\varphi^+) \Rightarrow \varphi(t, P) \in L(\varphi^+), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se φ^+ è limitata, allora $L(\varphi^+)$ è un insieme non vuoto, compatto e connesso.

Dimostrazione. Supponiamo che $P \in L(\varphi^+)$, $t_k \rightarrow +\infty$, $P_k = \varphi(t_k; x_0)$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k = P$. Fissiamo un $t \in \mathbb{R}$. Tenendo conto della dipendenza continua dai dati iniziali, si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(t + t_k; x_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(t; \varphi(t_k; x_0)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(t; P_k) = \varphi(t, P). \quad (6.3)$$

Quindi, $\varphi(t; P) \in L(\varphi^+)$.

Sia $\{P_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L(\varphi^+)$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k = P$. Questo implica che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\nu > 0$ tale che

$$\delta_k = \|P - P_k\| < \varepsilon, \quad k \geq \nu. \quad (6.4)$$

Poiché $P_k \in L(\varphi^+)$, esiste una successione monotona crescente tale che

$$\|\varphi(t_k; x_0) - P_k\| < \delta_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6.5)$$

Dalle relazioni (6.4) e (6.5) segue che $\|\varphi(t_k; x_0) - P\| < \varepsilon$ per $k \geq \nu$, e quindi $L(\varphi^+)$ è chiuso.

Ora, supponiamo che φ^+ sia limitata. L'insieme $L(\varphi^+)$ è non vuoto e limitato. Dunque, per il teorema di Heine-Borel,² l'insieme $L(\varphi^+)$ è compatto. Supponiamo, inoltre, che $L(\varphi^+)$ non sia connesso. Allora esistono due insiemi M ed N chiusi tali che $M \cup N = L(\varphi^+)$ e $M \cap N = \emptyset$. Poniamo

$$\delta = d(M, N) = \min_{[\xi \in M, \eta \in N]} \|\xi - \eta\| > 0. \quad (6.6)$$

Allora esistono due successioni $\{t'_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{t''_k\}_{k=1}^{\infty}$ monotone e crescenti tali che per $k \in \mathbb{N}$:

$$d(\varphi(t'_k; x_0), M) < \frac{\delta}{2}, \quad (6.7)$$

²Un sottoinsieme di \mathbb{R}^n è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

$$d(\varphi(t_k''; x_0), N) < \frac{\delta}{2}. \quad (6.8)$$

Dalle relazioni (6.6), (6.7) e (6.8) e dalla disuguaglianza triangolare, segue che per $k \in \mathbb{N}$

$$d(\varphi(t_k'; x_0), M) < \frac{\delta}{2}, \quad (6.9)$$

$$d(\varphi(t_k''; x_0), M) > \frac{\delta}{2}. \quad (6.10)$$

Quindi, per il teorema degli zeri di una funzione continua, applicato alla funzione continua $h(t) = d(\varphi(t; x_0), M)$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un $t_k \in [t_k', t_k'']$ tale che

$$d(\varphi(t_k; x_0), M) = \frac{\delta}{2}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6.11)$$

La successione $\{\varphi(t_k; x_0)\}_{k=0}^{\infty}$ è limitata e quindi, per il teorema di Bolzano-Weierstrass,³ una sua sottosuccessione converge ad un punto Q che, per la definizione dell'insieme $L(\varphi^+)$, deve appartenere a $L(\varphi^+) = M \cup N$. Ciò contraddice le relazioni (6.6) e (6.11). Quindi, $L(\varphi^+)$ è connesso. ■

Teorema 6.1.3 (Poincaré-Bendixson). Sia φ^+ limitata e $L(\varphi^+) \subset \Omega$. Se $L(\varphi^+)$ contiene solo punti regolari, cioè

$$P \in L(\varphi^+) \Rightarrow f(P) \neq (0, 0), \quad (6.12)$$

allora vale una delle due seguenti tesi:

- i) $\varphi^+ = L(\varphi^+)$ ed essa è un'orbita periodica.
- ii) $\varphi^+ \cap L(\varphi^+) = \emptyset$ e $L(\varphi^+)$ è un'orbita periodica.

Di conseguenza, si ha che se D è un sottoinsieme di Ω , aperto e limitato e tale che ogni orbita che entri in D non possa più uscirne, allora esiste un'orbita periodica in D .

Per darne una dimostrazione, introduciamo il concetto di trasversale e quattro lemmi preliminari.

Definizione 6.1.2. Sia l un segmento chiuso e limitato di una retta nel piano. Diremo che l è *trasversale rispetto a* $\varphi(x)$ se $\varphi(P) = (\varphi_1(P), \varphi_2(P))$ non è parallelo ad l per ogni $P \in l$.

Lemma 6.1.1. Valgono le seguenti proprietà:

³Ogni successione limitata in \mathbb{R}^n ha una sottosuccessione convergente.

- i) se $P \in \Omega$ è un punto regolare per $\varphi(x)$ e $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è un versore non parallelo a $\varphi(P)$, allora esiste un segmento trasversale l parallelo a ν e tale che $P \in l$.
- ii) Se l è un segmento trasversale, ogni orbita, che interseca l , lo interseca trasversalmente. Questo significa che la retta alla quale appartiene l divide il piano \mathbb{R}^2 in due semi-piani π_+ e π_- tali che si verifica una delle due seguenti alternative:
- a) se $x(\bar{t}, x^0) \in l$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $x(t', x^0) \in \pi_+$ per $t' \in]\bar{t}, \bar{t} + \delta[$ e $x(t'', x^0) \in \pi_-$ per $t'' \in]\bar{t} - \delta, \bar{t}[$;
- b) se $x(\bar{t}, x^0) \in l$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $x(t', x^0) \in \pi_-$ per $t' \in]\bar{t}, \bar{t} + \delta[$ e $x(t'', x^0) \in \pi_+$ per $t'' \in]\bar{t} - \delta, \bar{t}[$.
- iii) Sia $P_0 \in l$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\|P - P_0\| < \varepsilon$ si ha che $x(t, P) \in l$ per un certo $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Dimostrazione. Sia

$$a_1(x_1 - \bar{x}_1) + a_2(x_2 - \bar{x}_2) = 0, \quad a_1^2 + a_2^2 = 1, \quad (6.13)$$

l'equazione normale di una retta che passa per il punto \bar{x} . L'equazione parametrica di un segmento l presenta la seguente forma:

$$x_j(\tau) = \bar{x}_j + \nu_j \tau, \quad j = 1, 2, \quad -\delta' \leq \tau \leq \delta'', \quad \nu_1 = -a_2, \quad \nu_2 = a_1, \quad (6.14)$$

dove $\delta', \delta'' > 0$. Il segmento l è trasversale se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{pmatrix} = a_1 \varphi_2(x) - a_2 \varphi_1(x) = \nu_1 \varphi_1(x) + \nu_2 \varphi_2(x) \neq 0. \quad (6.15)$$

Se $\nu_1 \varphi_2(\bar{x}) - \nu_2 \varphi_1(\bar{x}) \neq 0$, dalla continuità segue che, per δ' e δ'' abbastanza piccoli, vale la relazione (6.15), e, dunque, la parte i).

Abbiamo definito il segmento trasversale l . Poniamo

$$\pi_{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \pm(a_1(x_1 - \bar{x}_1) + a_2(x_2 - \bar{x}_2)) > 0\}. \quad (6.16)$$

Supponiamo, per assurdo, che l sia trasversale ed esistano due punti $P, Q \in l$ tali che le traiettorie $\gamma(P)$ e $\gamma(Q)$ intersecano l nelle direzioni opposte, cioè per un certo $\delta > 0$ si ha

$$x(t, P) \in \pi_{\pm}, \quad 0 < \pm t < \delta, \quad (6.17a)$$

$$x(t, Q) \in \pi_{\mp}, \quad 0 < \pm t < \delta. \quad (6.17b)$$

Osserviamo che per (6.16) si conclude che (6.17) equivale a

$$\nu_1 \frac{x_1(t', P) - x_1(t'', P)}{t' - t''} + \nu_2 \frac{x_2(t', P) - x_2(t'', P)}{t' - t''} > 0, \quad (6.18a)$$

dove $0 < t' < \delta$ e $-\delta < t'' < 0$,

$$\nu_1 \frac{x_1(t', Q) - x_1(t'', Q)}{t' - t''} + \nu_2 \frac{x_2(t', Q) - x_2(t'', Q)}{t' - t''} < 0, \quad (6.18b)$$

dove $0 < t' < \delta$ e $-\delta < t'' < 0$. Utilizzando il teorema di Lagrange, la continuità di $\varphi(x)$, il teorema della permanenza del segno e considerando che $x(t, P)$ e $x(t, Q)$ sono soluzioni di (6.1), da (6.18) otteniamo

$$\nu_1 \varphi_1(P) + \nu_2 \varphi_2(P) \geq 0, \quad \nu_1 \varphi_1(Q) + \nu_2 \varphi_2(Q) \leq 0.$$

La definizione di trasversale implica

$$\nu_1 \varphi_1(P) + \nu_2 \varphi_2(P) > 0, \quad \nu_1 \varphi_1(Q) + \nu_2 \varphi_2(Q) < 0. \quad (6.19)$$

Queste disuguaglianze ed il teorema per gli zeri di una funzione continua implicano l'esistenza di un punto $R \in l$, compreso tra P e Q , tale che $\nu_1 \varphi_1(R) + \nu_2 \varphi_2(R) = 0$. Questo è assurdo, perché l è trasversale. Dunque, è vera la parte ii).

Sia $(\xi, \eta) \in \Omega$. L'orbita definita da $x(t, (\xi, \eta))$ interseca il segmento trasversale se e solo se l'equazione

$$H(t, \xi, \eta) = a_1(x_1(t, (\xi, \eta)) - \bar{x}_1) + a_2(x_2(t, (\xi, \eta)) - \bar{x}_2) = 0 \quad (6.20)$$

ammette almeno una soluzione $t = t(\xi, \eta)$. Poiché abbiamo $H(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$ e $\partial_t H(0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \nu_1 \varphi_1(\bar{x}) + \nu_2 \varphi_2(\bar{x}) \neq 0$, l'applicazione del teorema sulle funzioni implicite implica la parte iii). ■

Lemma 6.1.2. Sia $A = \{x(t, \bar{x}) : \underline{t} \leq t \leq \bar{t}\}$ un arco chiuso di un'orbita $\gamma(\bar{x})$ e sia l un segmento trasversale. Se $A \cap l \neq \emptyset$, allora $A \cap l$ è un insieme finito e l'ordine dei punti dell'intersezione su A e su l è lo stesso. Più precisamente, se

$$A \cap l = \{Q_1, \dots, Q_m\}, \quad (6.21)$$

dove

$$Q_k = x(\tau_k, \bar{x}), \quad k = 1, \dots, m, \quad \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m, \quad (6.22)$$

allora i vettori

$$\overrightarrow{Q_1 Q_2}, \overrightarrow{Q_2 Q_3}, \dots, \overrightarrow{Q_{m-1} Q_m} \quad (6.23)$$

hanno la stessa direzione. Quindi, se l'orbita $\gamma(\bar{x})$ è chiusa, allora essa non può intersecare l in più di un punto.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $A \cap l$ sia un insieme infinito. Allora esiste una successione $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [\underline{t}, \bar{t}]$ tale che $t_k \neq t_i$ per $k \neq i$ e $P_k = \varphi(t_k) \in l$, $\varphi(t) = x(t, \bar{x})$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, considerando una sottosuccessione di $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, esiste $\hat{t} \in [\underline{t}, \bar{t}]$ tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \hat{t}$. Poiché l è chiuso, $P = \varphi(\hat{t}) \in l$. Il vettore $\overrightarrow{\varphi(\hat{t})\varphi(t_k)}$ è parallelo ad l . Più precisamente, dividendo per $t_k - \hat{t} \neq 0$, si ha

$$\nu_1 \frac{\varphi_1(t_k) - \varphi_1(\hat{t})}{t_k - \hat{t}} + \nu_2 \frac{\varphi_2(t_k) - \varphi_2(\hat{t})}{t_k - \hat{t}} = 0, \quad (6.24)$$

per infiniti $k \in \mathbb{R}$. Dal fatto che $\varphi(t)$ è soluzione di (6.1) e dal teorema di Lagrange, segue che esistono dei θ_k, ρ_k compresi tra t_k e \hat{t} tali che

$$\nu_1 \varphi_{1*}(\varphi_1(\theta_k), \varphi_2(\rho_k)) + \nu_2 \varphi_{2*}(\varphi_1(\theta_k), \varphi_2(\rho_k)) = 0, \quad (6.25)$$

per infiniti $k \in \mathbb{R}$. Facendo tendere k ad infinito, si ottiene

$$\nu_1 \varphi_1(P) + \nu_2 \varphi_2(P) = 0,$$

ovvero una contraddizione, giacché l è un segmento trasversale e $P \in l$.

Abbiamo dimostrato che $A \cap l$ è un insieme finito e per $m \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere le relazioni (6.21) e (6.22). Senza perdere la generalità, con opportune traslazioni e rotazioni sul piano $O_{x_1 x_2}$ e tenendo conto che nella relazione (6.23) l'ordine è invariante rispetto alle traslazioni e rotazioni, possiamo supporre che per certi $\bar{b} > \underline{b} > 0$:

$$l = \{(0, x_2) : \underline{b} \leq x_2 \leq \bar{b}\}, \quad (6.26)$$

$$A \cap l = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}, \quad (6.27)$$

$$Q_j = (0, b_j) = \varphi(\tau_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad \tau_1 < \dots < \tau_m, \quad (6.28)$$

dove $b_k \in [\underline{b}, \bar{b}]$ per $k = 1, \dots, m$. Per la simmetria rispetto all'origine e per il lemma precedente, possiamo supporre che le orbite intersechino l in verso antiorario, cioè

$$\varphi_1(P) = \varphi_1(0, x_2) < 0, \quad P = (0, x_2) \in l. \quad (6.29)$$

La relazione (6.23) diventa

$$b_1 - b_2, \quad b_2 - b_3, \quad \dots, \quad b_{m-1} - b_m, \quad (6.30)$$

che presentano lo stesso segno.

Si possono avere due possibilità:

$\alpha)$ $b_1 > b_2$;

$\beta)$ $b_2 > b_1$.

Consideriamo il primo caso. Indichiamo con J la curva regolare di Jordan formata dall'arco:

$$\widehat{Q_1 Q_2} = \{x(t, \bar{x}) : t_1 \leq t \leq t_2\},$$

e il segmento $[Q_2 Q_1]$. Per il teorema della curva di Jordan, J divide il piano \mathbb{R}^2 in due componenti distinte, aventi entrambe J come frontiera, una delle quali è limitata e l'altra no. Cioè

$$\mathbb{R}^2 \setminus J = D_{int} \cup D_{ext}, \quad D_{int} \cap D_{ext} = \emptyset, \quad (6.31)$$

dove D_{int} è la componente interna limitata e D_{ext} è la componente esterna illimitata. Inoltre, risulta che per ogni curva di Jordan S si ha

$$S \cap D_{int} \neq \emptyset, \quad S \cap D_{ext} \neq \emptyset \Rightarrow S \cap J \neq \emptyset. \quad (6.32)$$

Dalla definizione di t_1 , l'arco $\{\varphi(t) : t \leq t \leq t_1\}$ non interseca l . L'arco $\{\varphi(t) : t_2 \leq t \leq \bar{t}\}$, per l'unicità delle soluzioni di (6.1), non può intersecare l'arco $\widehat{Q_1 Q_2}$. E non può intersecare il segmento $[Q_2 Q_1]$ per il lemma precedente. Ci rimane un'unica possibilità: il punto Q_3 deve essere contenuto in D_{int} , e, dunque, Q_2 si trova tra Q_1 e Q_3 . Si procede di pari passo per $m > 3$, fino a quando si arriva alla conclusione (6.23).

Se $Q_1 = Q_2$, l'orbita $\gamma(\bar{x})$ e l'arco \widehat{A} sono chiusi. Se, per assurdo, $\gamma(\bar{x})$ è chiusa e $\gamma(\bar{x}) \cap l$ è costituita da almeno due punti, allora gli argomenti utilizzati per la dimostrazione della relazione (6.23) mostrano che $\gamma(\bar{x})$ non è chiusa, cioè una contraddizione. ■

Lemma 6.1.3. Se $\gamma^+ \cap L(\gamma^+) \neq \emptyset$, allora γ^+ è periodica e si ha

$$\gamma^+ = L(\gamma^+).$$

Dimostrazione. Sia

$$P_1 = \varphi(t_1) \in \gamma^+ \cap L(\gamma^+), \quad t_1 > 0, \quad \varphi(t) = x(t, x^0). \quad (6.33)$$

Se P_1 è un punto critico, vale $\gamma^+ = L(\gamma^+) = \{P_1\}$.

Supponiamo che P_1 sia regolare. Per il lemma 6.1.1, esiste un segmento trasversale l tale che $P_1 \in l$. Poiché $P_1 \in L(\gamma^+)$, dalla definizione di $L(\gamma^+)$ segue che per ogni $\delta > 0$ esiste \hat{t} tale che

$$Q = \varphi(\hat{t}) \in B_\delta(P_1), \quad \hat{t} > t_1 + 2. \quad (6.34)$$

Fissiamo Q . Fissando, poi, un $\varepsilon \in]0, 1[$, prendiamo un δ che rispetti la parte iii) del lemma 6.1.1, in maniera tale che

$$\tilde{P} = \varphi(\tilde{t}) = x(\tilde{t} - \hat{t}, \varphi(\hat{t})) = x(\tilde{t} - \hat{t}, Q) \in l \cap \gamma^+ \cap B_\delta(P_1), \quad (6.35)$$

dove $|\tilde{t} - \hat{t}| < \varepsilon < 1$.

Supponiamo che $\tilde{P} \neq P_1$. Allora l'arco $\widehat{P_1\tilde{P}}$, per il lemma precedente, interseca l in un numero finito di punti e più, cioè i punti successivi di possibili intersezioni con $\varphi(t)$, dove $t > \max\{\tilde{t}, \hat{t}\}$. Di conseguenza, possiamo trovare un numero positivo μ tale che

$$\|\varphi(t) - P_1\| \geq \mu, \quad t > \max\{\tilde{t}, \hat{t}\}. \quad (6.36)$$

Questo, però, porta ad un assurdo, perché $P_1 \in L(\gamma^+)$. Quindi, $\tilde{P} = P_1$ e γ è periodica. ■

Gli argomenti utilizzati nella dimostrazione precedente mostrano che se l è un segmento trasversale ed $l \cap L(\gamma^+) \neq \emptyset$, allora $l \cap L(\gamma^+)$ contiene un solo punto.

Lemma 6.1.4. Se $L(\gamma^+)$ contiene un'orbita periodica C , allora $C = L(\gamma^+)$.

Dimostrazione. Supponiamo che $L(\gamma^+) \setminus C \neq \emptyset$. Poiché $L(\gamma^+)$ è connesso e compatto, $L(\gamma^+) \setminus C$ non è un insieme chiuso, il che implica l'esistenza di un punto $Q_0 \in C$, che è un punto di accumulazione per $L(\gamma^+) \setminus C$. Sia l un segmento trasversale tale che $Q_0 \in l$. Ricordando la parte iii) del lemma 6.1.1, possiamo trovare un $\delta > 0$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$ e un punto

$$Q \in B_\delta(Q_0) \cap (L(\gamma^+) \setminus C),$$

tale che

$$\bar{Q} = x(\bar{t}, Q) \in l. \quad (6.37)$$

Poiché $Q \in L(\gamma^+)$ e per l'invarianza di $L(\gamma^+)$, segue che l'orbita $\gamma(Q)$ è data da

$$\gamma(Q) = \{x(t, Q) : t \in \mathbb{R}\},$$

e per la relazione (6.33) si deduce che $\bar{Q} \in L(\gamma^+)$. L'unicità delle soluzioni di (6.1) e il fatto che $Q \notin C$ implicano che

$$\gamma(Q) \cap C = \emptyset$$

e, in particolare, $\bar{Q} \neq Q_0$. Il che è assurdo. Quindi, $C = L(\gamma^+)$. ■

Torniamo ora alla dimostrazione del **Teorema di Poincaré-Bendixson**.

Dimostrazione. Se γ^+ è periodica, lo è anche $L(\gamma^+)$. Supponiamo che γ^+ non sia periodica. Per la limitatezza di γ^+ e per il primo teorema segue che $L(\gamma^+) \neq \emptyset$. Sappiamo, inoltre, che $L(\gamma^+)$ è compatto e, per ipotesi, che tutti i suoi punti sono regolari. Fissiamo $q_0 \in L(\gamma^+)$ e poniamo

$$\gamma_0 = \{x(t, Q) : t \in \mathbb{R}\}. \quad (6.38)$$

Dall'invarianza di $L(\gamma^+)$, si conclude che $\gamma_0 \subset L(\gamma^+)$. Fissiamo $P_0 \in L(\gamma_0^+)$. Sia l un segmento trasversale passante per P_0 . Dall'inclusione $L(\gamma_0^+) \subset L(\gamma^+)$, segue che

$$l \cap L(\gamma^+) = \{P_0\}. \quad (6.39)$$

D'altra parte, poiché $P_0 \in L(\gamma_0^+)$, la parte iii) del lemma 6.1.1 implica che $\gamma_0^+ \cap l \neq \emptyset$. Quindi, per il fatto che $\gamma_0^+ \subset L(\gamma^+)$ e per la relazione (6.39) si conclude che $\gamma_0^+ \cap l = \{P_0\}$. Quindi, $P_0 \in \gamma_0^+ \cap L(\gamma_0^+)$ e per il lemma 6.1.3 γ_0^+ (e, dunque, γ_0) è periodica.

Grazie a $\gamma_0 = L(\gamma_0^+)$ e per il lemma 6.1.4, ne segue che $\gamma_0 = L(\gamma^+)$. ■

6.2 Applicazioni ai sistemi non lineari

1. Biforcazione di Hopf. Allo studio degli stati di equilibrio è applicabile la teoria di Poincaré sulla riorganizzazione delle curve in caso di biforcazioni per famiglie generiche di sistemi ad un parametro (per un numero maggiore di parametri compaiono le singolarità più complesse di Whitney). Quando il parametro del sistema si avvicina ad un valore di biforcazione, uno stato di equilibrio muore, combinandosi in un altro, o viceversa. Dei due stati che nascono o muoiono simultaneamente, uno è stabile e l'altro è instabile. Al momento del cambiamento, entrambi gli stati di equilibrio si muovono con velocità infinita. Quindi, dato uno stato di equilibrio stabile rappresentante le condizioni di qualche sistema reale di economia, ecologia, fisica, ecc., se questo si incontra e collide con uno stato di equilibrio instabile, si trasforma in uno stato del tutto diverso: al variare del parametro, la condizione di equilibrio, nell'intorno considerato, scompare improvvisamente. La perdita di stabilità di uno stato di equilibrio di un sistema, al variare di un parametro, può avvenire nei due seguenti modi:

- a) al variare del parametro, lo stato di equilibrio genera un ciclo limite (cioè, un'orbita chiusa ed isolata sulla quale, almeno localmente, le altre traiettorie si avvolgono a spirale), ed il punto di equilibrio diventa instabile.

- b) Un ciclo limite instabile collassa in uno stato di equilibrio: il dominio di attrazione si riduce a zero insieme con il ciclo, che, infine, scompare, trasferendo la sua instabilità allo stato di equilibrio.

Nel primo caso, dopo la perdita di stabilità, si ha un fenomeno oscillatorio periodico e l'ampiezza di oscillazione è proporzionale alla radice quadrata della criticità, cioè la differenza tra il valore del parametro e il valore critico in cui l'equilibrio perde la stabilità. Poiché questo comportamento oscillatorio differisce di poco dallo stato di equilibrio, la perdita di stabilità è detta *soffice*. Nel secondo caso, invece, la perdita di stabilità è detta *dura*, perché, prima che si verifichi, il dominio di attrazione diventa piccolo e le perturbazioni generatesi tendono a portar via il sistema da questo dominio, ancor prima che il dominio stesso sia sparito.

Le nuove condizioni rappresentanti il sistema, dopo la perdita di stabilità prendono il nome di *attrattori*, dal momento che diventano dei centri di attrazione per stati iniziali temporanei. Nei lavori della teoria delle catastrofi e delle singolarità, le graduali perdite di stabilità sono chiamate biforcazioni di Hopf, di cui mostriamo un'applicazione qui di seguito.

Proviamo a determinare il ritratto delle fasi del sistema

$$\begin{cases} x' = y + x(a - x^2 - y^2), \\ y' = -x + y(a - x^2 - y^2), \end{cases}$$

al variare di a in \mathbb{R} . Troviamo il punto critico del sistema

$$\begin{cases} x' = 0, \\ y' = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y + x(a - x^2 - y^2) = 0, \\ -x + y(a - x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y = -x(a - x^2 - y^2), \\ -x - x(a - x^2 - y^2)^2 = 0 \end{cases}$$

e, dunque, $(0, 0)$ è l'unico punto critico del sistema.

Passando alle coordinate polari in \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

il sistema diventa

$$\begin{cases} \rho' = \rho(a - \rho^2), \\ \theta' = -1. \end{cases}$$

Una traiettoria particolare è data da $\rho = 0$, che rappresenta l'origine. Se $\rho = \sqrt{a}$, dove $a > 0$, questa rappresenta la circonferenza con centro nell'origine e raggio \sqrt{a} .

Le soluzioni del sistema sono

- $a < 0$ $\begin{cases} \rho = \sqrt{-a}(c_1 e^{-2at} - 1)^{-\frac{1}{2}}, \\ \theta = -t + c_2 \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
- $a = 0$ $\begin{cases} \rho = (2t + c_1)^{-\frac{1}{2}}, \\ \theta = -t + c_2 \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
- $a > 0$ $\begin{cases} \rho = \sqrt{a}(1 + c_1 e^{-2at})^{-\frac{1}{2}}, \\ \theta = -t + c_2 \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Studiamo la stabilità. La matrice jacobiana del sistema è

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\det(A) = a^2 + 1, \quad \text{tr } A = 2a, \quad \Delta = (\text{tr } A)^2 - 4 \det(A) = -4 < 0.$$

Risulta, pertanto, che se $a < 0$, l'origine è un fuoco stabile, con bacino di attrazione \mathbb{R}^2 . Se $a = 0$, l'origine è un centro, che, degenerando nella spirale del fuoco instabile al crescere di a , diventa un ciclo limite. Se $a > 0$, $(0, 0)$ è un fuoco instabile. Le orbite delle soluzioni sono delle spirali che per $t \rightarrow \infty$, tendono indefinitamente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = a$.

Più generalmente, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = y + \varepsilon x f(x^2 + y^2), \\ y' = -x + \varepsilon y f(x^2 + y^2), \end{cases}$$

dove $f \in C^k([0, +\infty[; \mathbb{R})$, $k \geq 1$, $f(0) = a$ ed ε è un piccolo parametro reale. Troviamo l'unico punto critico del sistema, che risulta essere l'origine $(0, 0)$. Passando alle coordinate polari in \mathbb{R}^2 , otteniamo

$$\begin{cases} \rho' = \rho f(\rho^2), \\ \theta' = -1. \end{cases}$$

Poniamo

$$N_f = \{z : z \geq 0, z f(z) = 0\}.$$

Dunque, se $z \in N_f$ e $z > 0$ allora il sistema precedente ammette una soluzione periodica, cioè un ciclo definito dalla relazione $\rho^2 = x^2 + y^2 = z$, ovvero la circonferenza con centro $(0, 0)$ e raggio \sqrt{z} se $\varepsilon \neq 0$, giacché $\varepsilon = 0$ rappresenta il valore di biforcazione.

Supponiamo che N_f sia finito, cioè

$$N_f = \{z_0, z_1, \dots, z_N\}, \quad 0 = z_0 < \dots < z_N,$$

per un certo numero naturale N . In tal caso il sistema ammette esattamente N cicli definiti dalle circonferenze $\rho^2 = x^2 + y^2 = z_j$, $j = 1, \dots, N$. Se $N = 0$ non esistono cicli. Il ritratto delle fasi dipende dal segno di ε e di $f(z)$ negli intervalli (z_j, z_{j+1}) , dove $j = 0, \dots, N - 1$, se $N \geq 1$.

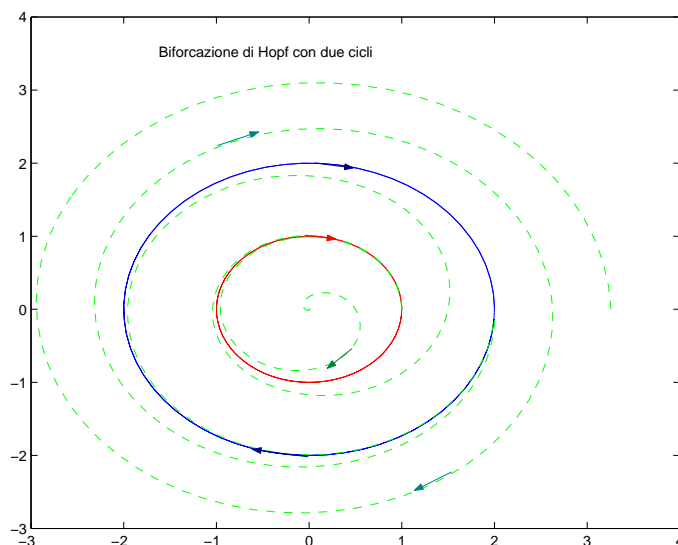


Figura 6.2: Biforcazione di Hopf con due cicli.

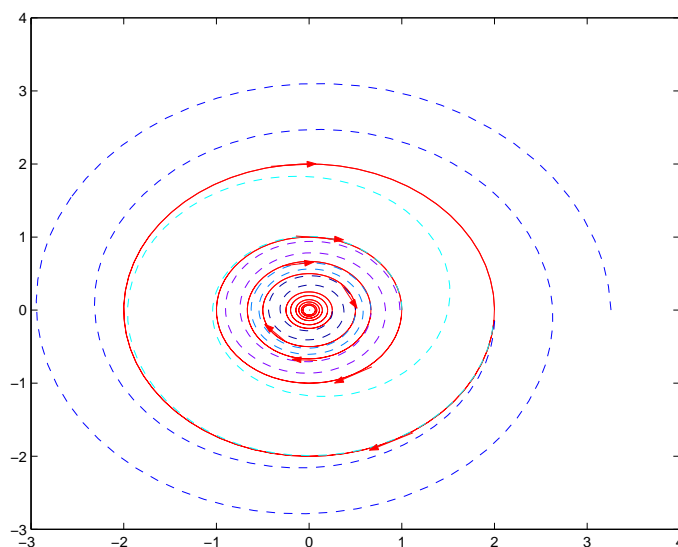


Figura 6.3: Cicli che si stringono intorno all'origine.

2. Equazione di Van der Pol. Consideriamo l'equazione

$$y'' + \varepsilon(y^2 - 1)y' + y = 0 \quad (\varepsilon > 0), \quad (6.40)$$

che può essere pensata come una perturbazione dell'oscillatore armonico $y'' + y = 0$, mediante il termine $\varepsilon(y^2 - 1)$. Considerando l'energia

$$E(y, y') = \frac{(y')^2 + y^2}{2},$$

si vede che

$$E'(y, y') = y'y'' + yy' = y'[\varepsilon(1 - y^2)y' - y] + yy' = \varepsilon(1 - y^2)(y')^2. \quad (6.41)$$

Quest'ultima espressione mostra come il sistema dissipi energia quando $|y| > 1$, mentre fornisce energia quando $|y| < 1$.

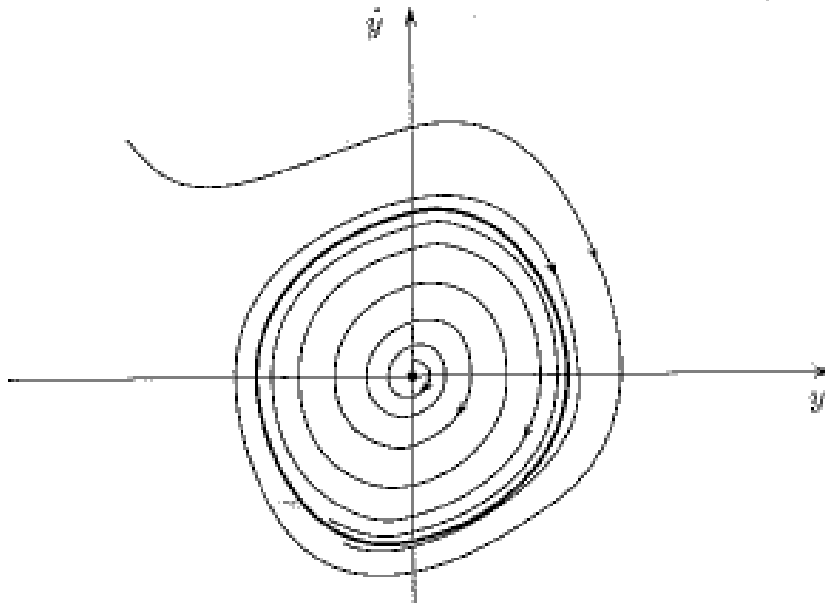


Figura 6.4: Orbite nel piano delle fasi per l'equazione di Van der Pol con $\varepsilon = 2$. La linea spessa indica l'unica orbita chiusa [14, 5].

Seguendo un suggerimento di Liénard (1869-1958), corrispondente al piano delle variabili y e $z = y' + \varepsilon(\frac{y^3}{3} - y)$, rispetto alle quali il sistema (6.40) diventa

$$\begin{cases} y' = z - \varepsilon(\frac{1}{3}y^3 - y), \\ z' = -y. \end{cases} \quad (6.42)$$

La corrispondenza $(y, y') \leftrightarrow (y, z)$ tra i punti dei due piani è biunivoca e regolare cosicché punti di equilibrio ed orbite si corrispondono nei due piani. Il punto di equilibrio è $(0, 0)$. Provando a linearizzare, otteniamo

$$\begin{cases} y' = \varepsilon y + z, \\ z' = -y. \end{cases} \quad (6.43)$$

Al precedente sistema è associata la matrice $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Poiché $\text{tr } A = \varepsilon > 0$, $\det(A) = 1 > 0$, $\Delta = (\text{tr } A)^2 - 4\det(A) < 0$, l'origine è un fuoco instabile e le orbite che partono da un suo intorno se ne allontanano a spirale.

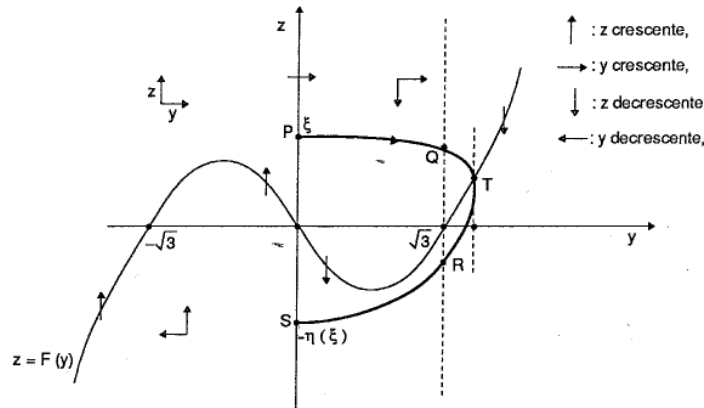


Figura 6.5: Dimostrazione dell'esistenza di una soluzione periodica dell'equazione di Van der Pol [14].

Dimostriamo che esiste un unico ciclo stabile, ossia che ogni traiettoria diversa da $(0, 0)$ tende, per $t \rightarrow +\infty$, ad avvolgersi su di esso. Consideriamo il campo vettoriale associato al sistema (6.43):

$$[z - F(y)]\mathbf{i} - y\mathbf{j} \quad (F(y) = \varepsilon(\frac{1}{3}y^3 - y)).$$

L'equazione differenziale della famiglia di traiettorie è data da

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z - F(y)}. \quad (6.44)$$

La sostituzione $z \rightarrow -z$ e $y \rightarrow -y$ lascia invariata l'equazione (6.44), essendo dispari la funzione $F(y)$. Facendo partire l'orbita da un punto $P = (0, \xi)$, dopo un tempo finito essa interseca la cubica $z = F(y)$ in un punto T . Mentre la variabile y decresce, l'orbita interseca l'asse z in un punto $S = (0, \eta(\xi))$, dove $\eta(\xi) > 0$. Ora, se esiste $\xi > 0$ tale che $\eta(\xi) = \xi$, allora si

ottiene simmetricamente rispetto all'origine un'altra orbita che si salda con la precedente, dando luogo ad una nuova orbita chiusa. Poiché tutte le orbite chiuse si avvolgono intorno all'origine, i punti fissi dell'applicazione $\xi \rightarrow \eta(\xi)$ sono in corrispondenza biunivoca con le orbite chiuse.

Dimostriamo l'unicità di questi punti fissi. Consideriamo la funzione di Liapunov $V(y, z) = y^2 + z^2$ e chiamiamo γ_ξ il tratto di orbita compreso tra $(0, \xi)$ e $(0, -\eta(\xi))$, e τ il relativo tempo di percorrenza. Abbiamo

$$\begin{aligned} \delta(\xi) = \eta(\xi)^2 - \xi^2 &= \int_0^\tau \frac{dV}{dt} dt = 2 \int_0^\tau (yy' + zz') dt = \\ &= -2 \int_0^\tau yF(y) dt = 2 \int_{\gamma_\xi} F(y) dz. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Facciamo vedere che

- i) $\delta(\xi) > 0$ nei punti vicino l'origine;
- ii) $\delta(\xi)$ è strettamente decrescente;
- iii) $\delta(\xi) \rightarrow -\infty$ per $\xi \rightarrow +\infty$.

Verifichiamo queste proprietà che ci assicurano l'esistenza di un unico punto $\bar{\xi}$ tale che $\delta(\bar{\xi}) = 0$, cioè $\bar{\xi} = \eta(\bar{\xi})$.

- i) Se ξ è nelle vicinanze dell'origine, il punto T si trova nel tratto in cui $y > 0$ e la funzione $z = F(y)$ è negativa. Dalla (6.45) segue che $\delta(\xi) > 0$.
- ii) Dall'espressione (6.44), possiamo scrivere

$$F(y) dz = -\frac{yF(y)}{z - F(y)} dy. \quad (6.46)$$

Inoltre:

$$\int_{\gamma_\xi} F(y) dz = \int_{\widehat{PQ}} \dots + \int_{\widehat{QR}} \dots + \int_{\widehat{RS}}. \quad (6.47)$$

Al crescere di ξ , \widehat{PQ} aumenta di quota, mentre \widehat{RS} si abbassa. Cioè $z - F(y)$ aumenta in modulo in questi tratti, mentre $yF(y)$ resta invariato e negativo. E poiché $F(y) dz > 0$, ne consegue che l'espressione (6.47) diminuisce. Sul tratto \widehat{QR} , F è positiva e strettamente crescente e $dz < 0$. Dunque, al crescere di ξ , l'integrale $\int_{\widehat{QR}} F(y) dz$ diminuisce.

iii) Consideriamo il tratto di orbita \widehat{QR} . Allora, si ha

$$\int_{\widehat{QR}} F(y) dz \leq \int_{\widehat{LN}} F(y) dz \leq F(a) \int_{\widehat{LN}} dz. \quad (6.48)$$

Poiché l'integrale $\int_{\widehat{LN}} dz$ (la differenza tra l'ordinata di N e l'ordinata di L) $\rightarrow -\infty$, quando $\xi \rightarrow +\infty$, segue la proprietà iii).

3. Modello logistico. Partiamo dalla seguente equazione alle derivate parziali, chiamata anche *equazione di Burgers*:

$$u_t = u_{xx} + uu_x. \quad (6.49)$$

Consideriamo un cambiamento di variabili, ponendo $u(x, t) = v(x + ct)$, dove $c > 0$. Otteniamo

$$cv' = v'' + vv',$$

che possiamo scrivere anche nel seguente modo:

$$(cv)' = \left(v' + \frac{v^2}{2}\right)'$$

Da cui si ottiene che

$$cv = v' + \frac{v^2}{2},$$

ossia

$$v' = cv\left(1 - \frac{v^2}{2}\right).$$

La soluzione del corrispondente problema di Cauchy è la seguente:

$$v(t) = \frac{v(0)}{\sqrt{e^{-2ct} + \frac{1}{2}v(0)^2[1 - e^{-2ct}]}}$$

incluso le tre soluzioni costanti $v = 0$ e $v = \pm\sqrt{2}$. Si vede subito che $v(t) \rightarrow \sqrt{2}$ per $v(0) > 0$, $v(t) \rightarrow -\sqrt{2}$ per $v(0) < 0$ e $v(t) \equiv 0$ per $v(0) = 0$. Quindi i punti di equilibrio $\pm\sqrt{2}$ sono asintoticamente stabili e quello $v = 0$ è instabile.

In modo analogo discutiamo l'equazione differenziale non lineare del primo ordine del tipo

$$y' = ay(1 - by), \quad a, b > 0. \quad (6.50)$$

Le rette $y = 0$ e $y = (1/b)$ sono le due soluzioni costanti. Le altre soluzioni si trovano integrando nel seguente modo:

$$\int \frac{dy}{y(1 - by)} = \int a dt \rightsquigarrow \log \left| \frac{y}{1 - by} \right| = at + c,$$

ossia

$$y(t) = \frac{y(0)}{by(0) + [1 - by(0)]e^{-at}}.$$

Questa espressione è la soluzione del modello logistico proposto nel 1845 dal matematico Pierre Verhulst (1804-1849), con il quale egli si impegnò a studiare il tasso di crescita relativo della popolazione, i cui unici fattori di evoluzione erano la fertilità e la mortalità. Siano, dunque $N(t)$ il numero di individui presenti al tempo t ; λ il numero di neonati per individuo nell'unità di tempo; μ il percentuale di individui che muore nell'unità di tempo. Indichiamo, poi, con $\varepsilon = \lambda - \mu$ il potenziale biologico della popolazione e con k le risorse dell'ambiente. La legge di evoluzione di Verhulst è data dall'equazione (6.50), in cui poniamo $a = \varepsilon$, $b = (1/k)$ e $y = N$, cioè

$$N'(t) = \varepsilon N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{k}\right), \quad \varepsilon, k > 0. \quad (6.51)$$

Il termine $\varepsilon N(t)$, che modella la crescita esponenziale della popolazione [secondo la legge di Malthus (1798)], è mitigato dal termine $-\frac{\varepsilon}{k}N(t)^2$, che descrive la competizione all'interno della popolazione. La soluzione è, dunque, data da

$$N(t) = \frac{kN(0)}{N(0)[1 - e^{-\varepsilon t}] + ke^{-\varepsilon t}}. \quad (6.52)$$

Per $t \rightarrow +\infty$, $N(t) \rightarrow k$, tranne nel caso $N(0) = 0$.

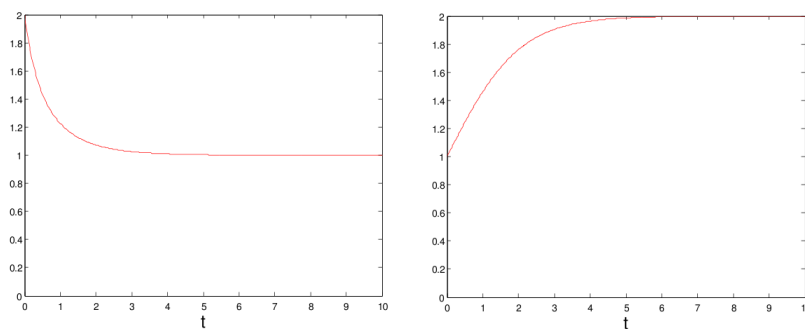


Figura 6.6: Le soluzioni $N(t)$ del modello di Verhulst per $N(0) = 2$, $k = 1$ e $\varepsilon = 1$ [grafico sinistro] e per $N(0) = 1$, $k = 2$ e $\varepsilon = 1$ [grafico destro].

4. Oscillatore di Lorentz. Consideriamo il sistema dinamico

$$\dot{x}(t) = \sigma(y - x), \quad (6.53a)$$

$$\dot{y}(t) = x(\rho - z) - y, \quad (6.53b)$$

$$\dot{z}(t) = xy - \beta z, \quad (6.53c)$$

dove $\sigma > 0$ si dice numero di Prandtl, $\rho > 0$ si dice numero di Rayleigh e $\beta > 0$ è una terza costante fisica positiva. L'oscillatore di Lorentz [18, Cap. 14] è un sistema dinamico di flusso caotico formulato da Edward Lorentz nel 1963, semplificando le equazioni di Boussinesq che descrivono le convezioni nell'atmosfera sotto condizioni di riscaldamento da sotto e raffreddamento da sopra.

L'oscillatore di Lorentz ha alcune proprietà elementari. Prima $(-x, -y, z)$ è soluzione se lo è (x, y, z) . Per $x = y = 0$ le equazioni (6.53a) e (6.53b) diventano tautologie ($0 = 0$), mentre $\dot{z}(t) = -\beta z$. Quindi $x = y = 0$ e $z(t) = z(0)e^{-\beta t}$ è soluzione delle (6.53). Inoltre,

$$\nabla \cdot (\sigma[y - x], x[\rho - z] - y, xy - \beta z) = -(\sigma + 1 + \beta) < 0.$$

Considerando un volume iniziale $v(0)$ che viene trasformato, all'istante t , nel volume $v(t)$, abbiamo

$$\dot{v}(t) = -(\sigma + 1 + \beta)v(t). \quad (6.54)$$

In altre parole, il volume $v(t)$ è decrescente nel tempo t e quindi il flusso descritto dalle (6.53) è dissipativo. La (6.54) implica che qualunque attractor del sistema dinamico (6.53) ha volume zero.

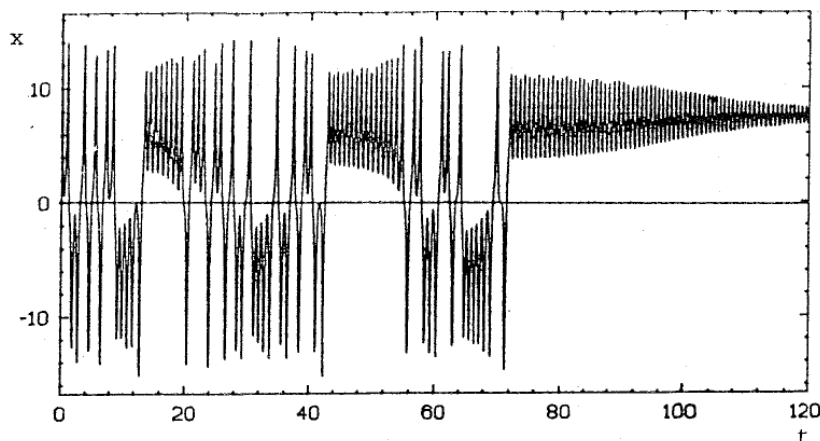


Figura 6.7: $x(t)$ per $\sigma = 10$, $\beta = (8/3)$ e $\rho = 22.4$. Osserviamo che $1 < \rho < \rho_H \approx 24.74$ e $x(t) \rightarrow \sqrt{\beta(\rho - 1)} \approx 7.55$ (Vedi [18, Fig. 14.2]).

Calcoliamo ora i punti di equilibrio (X, Y, Z) per cui $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = \dot{z}(t) = 0$. In tal caso $X = Y$. Quindi $X = Y = Z = 0$ oppure $Z = \rho - 1$ e $X^2 = Y^2 = \beta(\rho - 1)$. In altre parole, per $0 < \rho \leq 1$ il punto

$(0, 0, 0)$ è l'unico punto di equilibrio. Per $\rho > 1$ abbiamo inoltre i due punti $(\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$. La matrice Jacobiana

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

ha tre autovalori negativi per $x = y = z = 0$ se $0 < \rho < 1$. Di conseguenza, l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile delle (6.53) se $0 < \rho < 1$. Per $\rho = 1$ gli autovalori sono $-\beta$, $-(\sigma + 1)$ e 0 e quindi l'origine è un punto di equilibrio stabile se $\rho = 1$. Per $\rho > 1$ la matrice Jacobiana per $x = y = z = 0$ ha due autovalori negativi e uno positivo, e quindi l'origine è un punto di equilibrio instabile se $\rho > 1$.

Negli altri due punti di equilibrio il polinomio caratteristico della matrice Jacobiana ha la forma

$$p(z) \stackrel{\text{def}}{=} z^3 + (\sigma + 1 + \beta)z^2 + \beta(\sigma + \rho)z + 2\sigma\beta(\rho - 1).$$

Fattorizzando il polinomio, $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, si scopre che

$$z_1 + z_2 + z_3 = -(\sigma + 1 + \beta) < 0, \quad (6.55a)$$

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \beta(\sigma + \rho) > 0, \quad (6.55b)$$

$$z_1z_2z_3 = -2\sigma\beta(\rho - 1), \quad (6.55c)$$

quest'ultimo se $\rho > 1$. Inoltre, $p(z) > 0$ per $z \geq 0$; di conseguenza, se ci sono zeri con parte reale non negativa, essi devono per forza essere due complessi coniugati più uno zero negativo. Se, per un opportuno $\rho = \rho_H > 1$, due degli zeri sono uguali a $z_{1,2} = \pm i\omega$ con $\omega > 0$, allora il terzo zero deve valere $z_3 = -(\sigma + 1 + \beta)$, poichè la loro somma vale $-(\sigma + 1 + \beta)$ [vedi la (6.55a)]. Dalle (6.55a)-(6.55b) segue in tal caso

$$z_1z_2 = \omega^2 = \frac{2\sigma\beta(\rho_H - 1)}{\sigma + 1 + \beta} = \beta(\sigma + \rho_H),$$

e quindi $\rho_H = [\sigma(\sigma + \beta + 3)/(\sigma - \beta - 1)]$. Di conseguenza, per $\rho = \rho_H$ c'è una biforcazione di Hopf. Per $\rho = 1$ gli zeri sono $\{0, -\beta, -(\sigma + 1)\}$, mentre al crescere di ρ gli zeri si cambiano in modo continuo e hanno un prodotto $z_1z_2z_3 < 0$. Ciò implica che per

$$1 < \rho < \rho_H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1},$$

tutti e tre zeri del polinomio hanno parte reale negativo e quindi i due punti di equilibrio sono ambedue asintoticamente stabili. Per $\rho > \rho_H$ il polinomio ha un autovalore negativo e due autovalori con parti reali positivi; in tal caso i due punti di equilibrio sono instabili.⁴ Infatti, dividendo il polinomio da ρ^3

⁴Quest'ultimo si può dimostrare dal Teorema di Routh-Hurwitz [9, Sec. XV.6].

si ottiene

$$w^3 + \underbrace{\frac{\sigma + 1 + \beta}{\rho}}_{\rightarrow 0, \rho \rightarrow +\infty} w^2 + \underbrace{\frac{\beta(\sigma + \rho)}{\rho^2}}_{\rightarrow 0, \rho \rightarrow +\infty} w + \underbrace{2\sigma\beta \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)}_{\rightarrow 2\sigma\beta, \rho \rightarrow +\infty},$$

dove $w = (z/\rho)$. Quindi per $\rho \rightarrow +\infty$ gli zeri di $p(z)$ si comportano asintoticamente come

$$-\rho \sqrt[3]{2\sigma\beta} < 0, \quad \sqrt[3]{2\sigma\beta} \rho \left\{ \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{3} \right\},$$

cioè per ρ abbastanza grande ci sono due zeri complessi coniugati con parte reale positiva e uno zero negativo. Siccome, al crescere di ρ , gli zeri possono attraversare l'asse immaginario soltanto per $\rho = \rho_H$, segue che per $\rho > \rho_H$ ci sono due zeri complessi coniugati con parte reale positiva e uno zero negativo.

Consideriamo ora la funzione di Liapunov

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2} (\rho x^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2\rho)^2). \quad (6.56)$$

In tal caso

$$\begin{aligned} \dot{H}(t) &= \rho x \dot{x} + \sigma y \dot{y} + \sigma(z - 2\rho) \dot{\rho} \\ &= \rho x [\sigma(y - x)] + \sigma y [x(\rho - z) - y] + \sigma(z - 2\rho) [xy - \beta z] \\ &= -\sigma \{ \rho x^2 + y^2 + \beta(z - \rho)^2 - \beta \rho^2 \} \\ &= -\sigma \beta \rho^2 \left\{ \left(\frac{x}{\sqrt{\rho\beta}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\rho\sqrt{\beta}} \right)^2 + \left(\frac{z - \rho}{\rho} \right)^2 - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Sia m il massimo della funzione di Liapunov H nell'ellissoide

$$\begin{aligned} E &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{\sqrt{\rho\beta}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\rho\sqrt{\beta}} \right)^2 + \left(\frac{z - \rho}{\rho} \right)^2 \leq 1 \right\} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \dot{H}(t) \geq 0 \}. \end{aligned}$$

Un tale massimo viene assunto sulla frontiera ∂E .⁵ Partendo dal punto iniziale $\vec{x}(0)$ con $H(\vec{x}(0)) > m$ [cioè, $\vec{x}(0) \notin E$], il valore della H deve scendere

⁵Nell'unico punto in \mathbb{R}^3 in cui si annulla il gradiente della H , cioè in $(0, 0, 2\rho)$, la matrice Hessiana ha tre autovalori positivi. Quindi quel punto critico è il minimo assoluto della H in E . Secondo me (da verificare!), $m = 2\sigma\rho^2$, assunto nell'origine.

lungo l'orbita. Ad un opportuno istante $t_0 > 0$ l'orbita attraversa la frontiera dell'ellissoide E e da quel momento in poi l'orbita ci resta dentro. In altre parole, il flusso ha un'attrattore (di volume zero) che si trova all'interno dell'ellissoide E (ma può avere una struttura estremamente complicata).

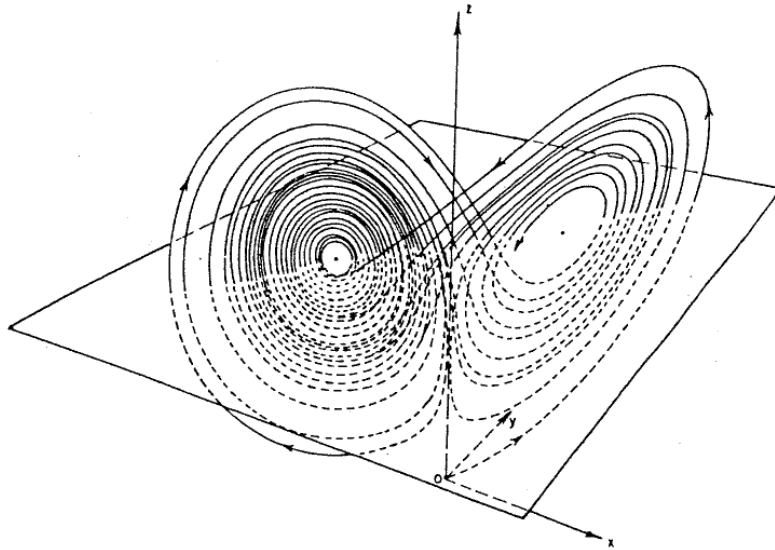


Figura 6.8: $\vec{x}(t)$ per $\sigma = 10$, $\beta = (8/3)$ e $\rho = 28$. Osserviamo che $\rho > \rho_H \approx 24.74$ e che $\vec{x}(t)$ si comporta in modo caotico (Vedi [18, Fig. 14.1]). La stessa figura, a colore, si trova in Wikipedia (inglese) sotto la voce Lorentz attractor.

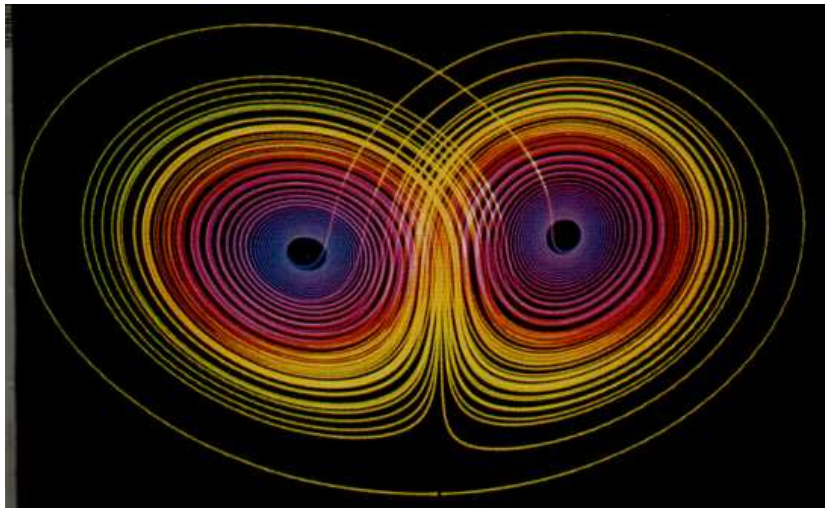


Figura 6.9: L'attrattore di Lorentz [10].

Capitolo 7

Frattali

7.1 Insieme di Cantor e le sue varianti

Il frattale prototipico è l'*insieme di Cantor*. Questo sottoinsieme dell'intervallo $[0, 1]$ viene costruito nel seguente modo:

$$K_0 = [0, 1],$$

$$K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1],$$

$$K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1],$$

$$K_3 = [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1],$$

ecc. Quindi K_n è l'unione disgiunta di 2^n sottointervalli di $[0, 1]$, tutti di lunghezza $(\frac{1}{3})^n$. Dunque la misura di K_n vale $(\frac{2}{3})^n$. Se K_n è l'unione degli intervalli $[a_j, b_j]$, allora K_{n+1} è l'unione degli intervalli

$$[a_j, \frac{2}{3}a_j + \frac{1}{3}b_j] \cup [a_j, \frac{1}{3}a_j + \frac{2}{3}b_j].$$

In altre parole, da ogni intervallo costituente di K_n si rimuove esattamente la sua terza parte centrata per ottenere due intervalli costituenti di K_{n+1} . È chiaro che

$$[0, 1] = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \dots,$$

cioè gli insiemi K_n costituiscono una successione decrescente. La sua intersezione, K , non è vuota (poichè contiene gli estremi di tutti i sottointervalli costituenti di tutti i K_n) e si chiama l'insieme di Cantor. Ovviamente, la misura di K è minore o uguale a $(\frac{2}{3})^n$ per ogni $n = 1, 2, 3, \dots$, quindi l'insieme di Cantor ha misura uguale a zero.

Ogni numero in $[0, 1]$ può essere rappresentato nel sistema ternario (con le tre cifre 0, 1 e 2) nella forma

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n},$$

dove $d_n \in \{0, 1, 2\}$ per ogni $n = 1, 2, 3, \dots$. La non unicità dello sviluppo ternario consiste nelle seguenti rappresentazioni ternarie dello stesso numero:

$$x = \begin{cases} 0, d_1 d_2 \dots d_{m-1} d_m 00000 \dots = \sum_{n=1}^m \frac{d_n}{3^n}, \\ 0, d_1 d_2 \dots d_{m-1} (d_m - 1) 2222 \dots = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{d_n}{3^n} + \frac{d_m - 1}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^n}, \end{cases} \quad (7.1)$$

dove $d_m \in \{1, 2\}$. In tal caso K_1 consiste in tutti gli $x \in [0, 1]$ con primo decimale $d_1 \in \{0, 2\}$. L'insieme K_2 consiste in tutti gli $x \in [0, 1]$ con primi due decimali $d_1, d_2 \in \{0, 2\}$, ecc. L'insieme K_n consiste in tutti gli $x \in [0, 1]$ con primi n decimali $d_1, \dots, d_n \in \{0, 2\}$. Di conseguenza, l'insieme di Cantor consiste in tutti gli $x \in [0, 1]$ per cui nello sviluppo ternario ci manca la cifra 1. I numeri con rappresentazione ternaria ambigua nel senso della (7.1) sono esattamente gli estremi degli intervalli che costituiscono gli insiemi K_n .

L'insieme di Cantor è non numerabile, quindi esso non può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali. Per vederlo consideriamo

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n} \in K,$$

dove $d_n = 0$ o $d_n = 2$ per $n = 1, 2, 3, \dots$. Ponendo

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} d_n}{2^n},$$

otteniamo un corrispondente numero $\phi(x)$ scritto

$$0, \frac{d_1}{2} \frac{d_2}{2} \frac{d_3}{2} \dots$$

nel sistema binario (con le due cifre 0 e 1). Infatti abbiamo cambiato la cifra ternaria 2 nella cifra binaria 1 e la cifra ternaria 0 nella cifra binaria 0. I due estremi dello stesso intervallo tolto durante la costruzione degli insiemi K_n hanno le rappresentazioni ternarie

$$\begin{aligned} x &= 0, d_1 d_2 \dots d_{m-1} 100000 \dots = 0, d_1 d_2 \dots d_{m-1} 022222 \dots, \\ y &= 0, d_1 d_2 \dots d_{m-1} 200000 \dots, \end{aligned}$$

dove $d_1, \dots, d_{m-1} \in \{0, 2\}$. In tal caso abbiamo nella rappresentazione binaria

$$\begin{aligned}\phi(x) &= 0, \frac{d_1}{2} \frac{d_2}{2} \dots \frac{d_{m-1}}{2} 011111 \dots, \\ \phi(y) &= 0, \frac{d_1}{2} \frac{d_2}{2} \dots \frac{d_{m-1}}{2} 100000 \dots\end{aligned}$$

Quindi

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\frac{1}{2}d_n}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\frac{1}{2}d_n}{2^n} + \frac{1}{2^m} = \phi(y).$$

In altre parole, gli estremi dello stesso intervallo tolto durante la costruzione degli insiemi K_n hanno la stessa immagine sotto la mappa ϕ . Di conseguenza, ϕ è una funzione continua non decrescente, mentre $\phi(K) = [0, 1]$. La mappa ϕ è biunivoca tranne negli estremi dello stesso intervallo tolto (dove è due a uno). Quindi l'insieme di Cantor K e l'intervallo $[0, 1]$ hanno la stessa cardinalità, cioè K è non numerabile.

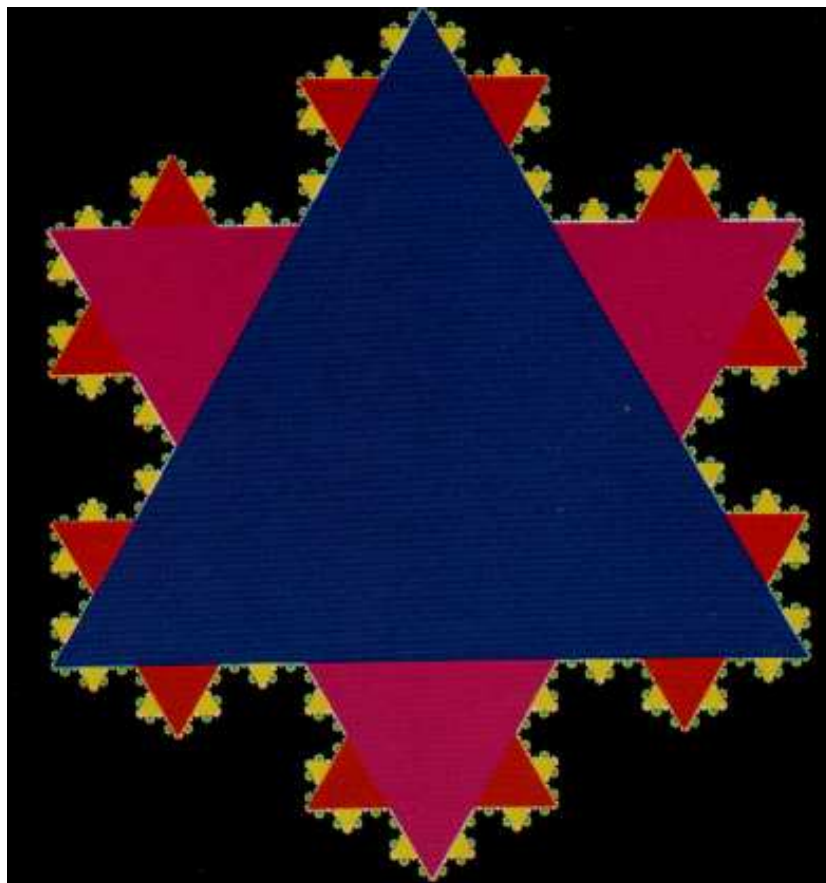


Figura 7.1: La curva di Koch [10].

Discutiamo ora una modifica dell'insieme di Cantor, cioè la curva di Koch. Invece di partire dall'intervallo $[0, 1]$ e di togliere sottointervalli uguali alla terza parte centrata, partiamo di un triangolo equilatero e aggiungiamo, all'esterno, triangoli equilateri che hanno le misure ridotte da un fattore 3.

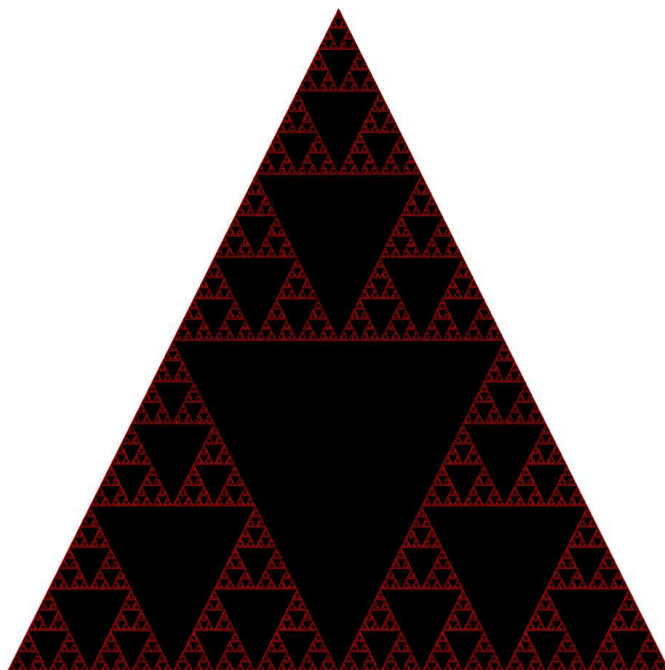


Figura 7.2: Il triangolo di Sierpiński (Vedi Wikipedia in inglese).

Un'altra variante è il triangolo di Sierpiński. Sia \mathbf{K}_0 la regione chiusa che ha un triangolo equilatero con lati di lunghezza 1 come la sua frontiera. Da questa regione triangolare si toglie la regione triangolare aperta con vertici i centri dei tre lati, il che conduce all'unione di tre regioni triangolari \mathbf{K}_1 , dove ogni triangolino ha tre lati di lunghezza $\frac{1}{2}$. Sia, ora, \mathbf{K}_n l'unione di 3^n regioni che hanno da frontiera un triangolo equilatero, dove ogni lato ha la lunghezza $(\frac{1}{2})^n$. Da ciascuna dei 3^n triangoli si toglie la regione triangolare aperta con vertici i centri dei tre lati, il che conduce a tre triangoli di \mathbf{K}_{n+1} al posto di ogni triangolo di \mathbf{K}_n . Si vede facilmente che l'area di \mathbf{K}_0 vale $\frac{1}{4}\sqrt{3}$. Alla transizione da \mathbf{K}_n a \mathbf{K}_{n+1} l'area viene ridotta da un fattore $\frac{2}{3}$. Quindi l'area di \mathbf{K}_n vale $\frac{1}{4}(\frac{2}{3})^n\sqrt{3}$. Inoltre,

$$[0, 1] = \mathbf{K}_0 \supset \mathbf{K}_1 \supset \mathbf{K}_2 \supset \mathbf{K}_3 \supset \dots \supset \mathbf{K}_n \supset \mathbf{K}_{n+1} \supset \dots$$

Di conseguenza, l'intersezione di tutti gli insiemi \mathbf{K}_n si chiama il triangolo di Sierpiński, \mathbf{K} . L'insieme \mathbf{K} ha l'area uguale a zero ed è non numerabile.

Si ripetino le analoghe considerazioni per il seguente tappeto di Sierpiński.

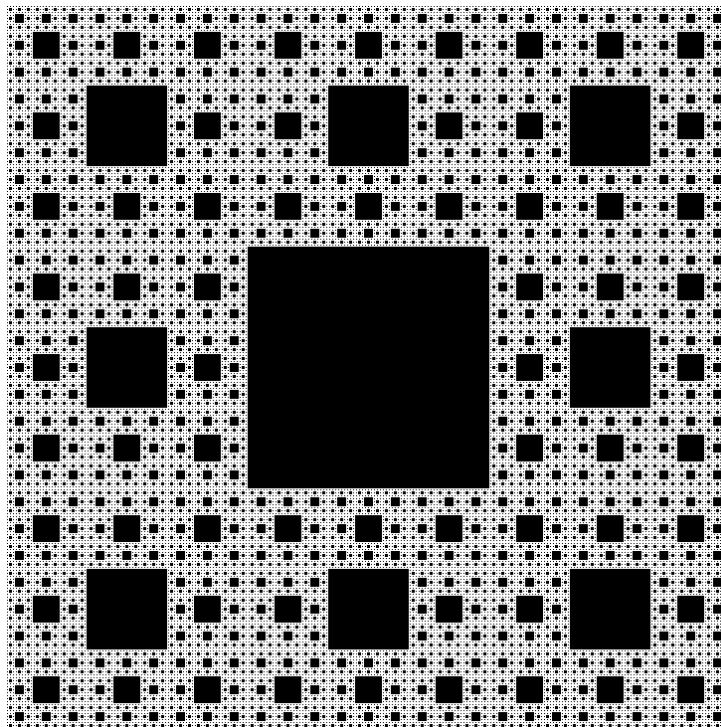


Figura 7.3: Il tappeto di Sierpiński [6].

7.2 Caratteristiche dei frattali

Prima di definire il concetto di frattale, discutiamo le sue proprietà caratteristiche. Un frattale ha le seguenti proprietà:

- a. un frattale ha una struttura ad uno scalo arbitrariamente piccolo.
- b. un frattale è troppo irregolare per poter essere descritto in termini di funzioni abbastanza lisce.
- c. un frattale consiste in parti che hanno la stessa struttura del frattale stesso. Tali parti hanno la stessa struttura delle loro sottoparti, ecc. Quindi si può ridurre lo scalo per arrivare ad una parte del frattale che ha la stessa struttura del frattale stesso. In inglese questa proprietà si chiama *self-similarity*.
- d. Il frattale viene spesso definito applicando una regola ricorsiva.

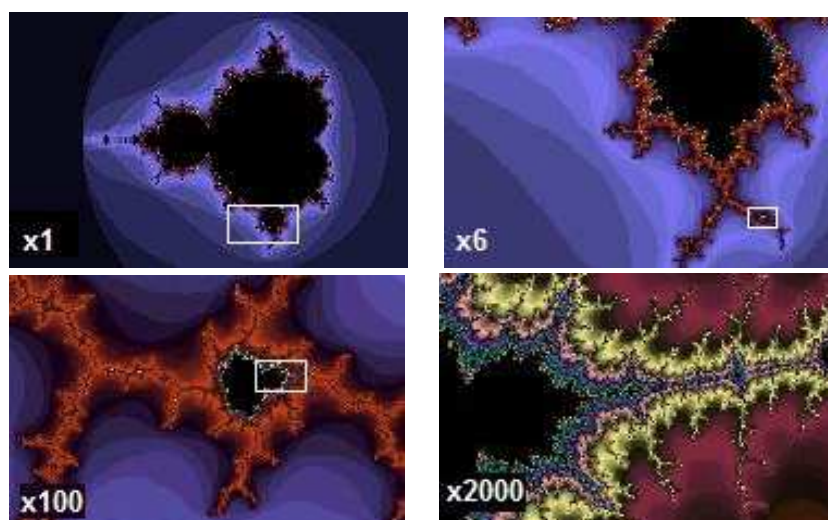


Figura 7.4: Dettagli dell'insieme di Mandelbrot: X1, X6, X100 e X2000 (Vedi Wikipedia in inglese).

Per tali motivi i frattali modellizzano strutture naturali quali la costa di un paese, i confini di una nuvola, una montagna, i cavolfiori e i broccoli, ecc. Aggiungendo abbastanza dettagli, la lunghezza della costa va all'infinito. Per esempio, ogni intervallo $[a, b]$ costituente di uno degli insiemi K_n , che conduce all'insieme di Cantor, ha gli stessi dettagli dell'insieme di Cantor stesso. Un altro esempio viene fornito dal triangolo di Sierpiński. Ogni triangolo, che nasce durante la sua costruzione, può essere messo in corrispondenza biunivoca con il triangolo di Sierpiński stesso. La stessa cosa vale per la curva di Koch. Un tipico frattale è l'insieme di Mandelbrot.

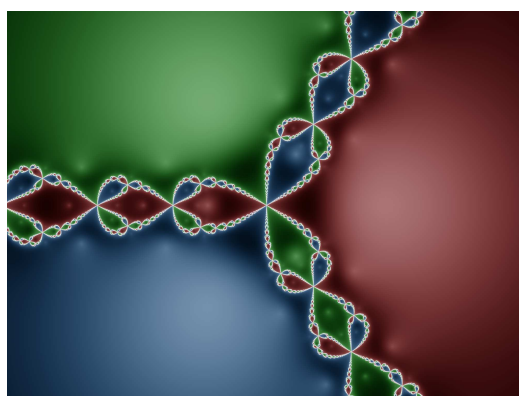


Figura 7.5: Bacini di attrazione per calcolare gli zeri del polinomio $z^3 - 1$ usando il metodo di Newton-Raphson. In bianco: il suo insieme di Julia.

Molti frattali escono dall'applicazione di un sistema dinamico discreto. Per esempio, l'applicazione del metodo di Newton-Rawson ad un polinomio $p(z)$ con $n \geq 3$ zeri semplici, cioè il sistema dinamico di equazione

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z)}{p'(z)},$$

conduce ad n bacini di attrazione attorno agli zeri più una struttura frattale lungo i bordi tra i bacini. Uno degli esempi più noti riguarda il polinomio $p(z) = z^4 - 1$ [Vedi la Fig. 5.5]. Un esempio simile riguarda il polinomio $p(z) = z^3 - 1$.

Una famiglia di frattali legata all'insieme di Mandelbrot riguarda i cosiddetti insiemi di Julia. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica intera.¹ Consideriamo il sistema dinamico discreto

$$z_{n+1} = f(z_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

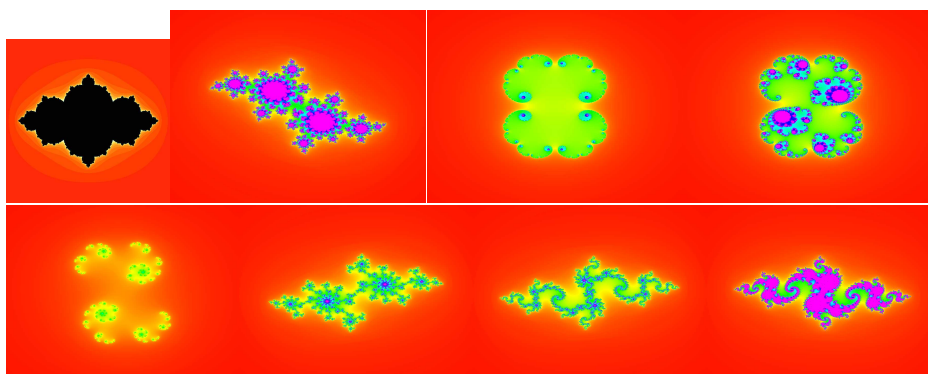


Figura 7.6: Insiemi di Julia per $c = (1 - \sqrt{5})/2$ [su 1], $c = ((-3 + \sqrt{5})/2) + i(-1 + \sqrt{5})/2$ [su 2], $c = 0,285$ [su 3], $c = 0,285 + 0,01i$ [su 4], $c = 0,45 + 0,1428i$ [giù 1], $c = -0,70176 - 0,3842i$ [giù 2], $c = -0,835 - 0,2321i$ [giù 3], $c = -0,8 + 0,156i$ [giù 4]. Il primo disegno riguarda un insieme di Julia riempito. I valori di c in verde appartengono all'insieme di Mandelbrot. Quelli in rosso invece no. Quelli in blu magari no. Vedi Wikipedia (inglese).

Si dice *insieme di Julia riempito* (inglese: filled Julia set) l'insieme $C(f)$ di tutti i punti $z_0 \in \mathbb{C}$ per cui la successione $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ è limitata. La sua frontiera si chiama *insieme di Julia*, $J(f)$. L'insieme di Julia è la chiusura

¹Cioè, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, dove la serie di potenze è assolutamente convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$. Esempi: e^z , $\sin(z)$, $\cos(z)$, i polinomi.

dell'insieme dei punti periodici ripulsivi. L'insieme di Julia, $J(f)$, e il suo complementare, l'insieme di Fatou $F(f)$, sono invarianti sotto la mappa f :

$$f^{-1}(J(f)) = J(f) = f(J(f)), \quad f^{-1}(F(f)) = F(f) = f(F(f)).$$

Gli insiemi di Julia sono stati studiati prevalentemente per le mappe

$$f_c(z) = z^2 + c,$$

dove $c \in \mathbb{C}$ è un parametro. L'insieme di tutti i punti $c \in \mathbb{C}$ per cui l'insieme di Julia $J(f_c)$ è connesso, si chiama *insieme di Mandelbrot*.

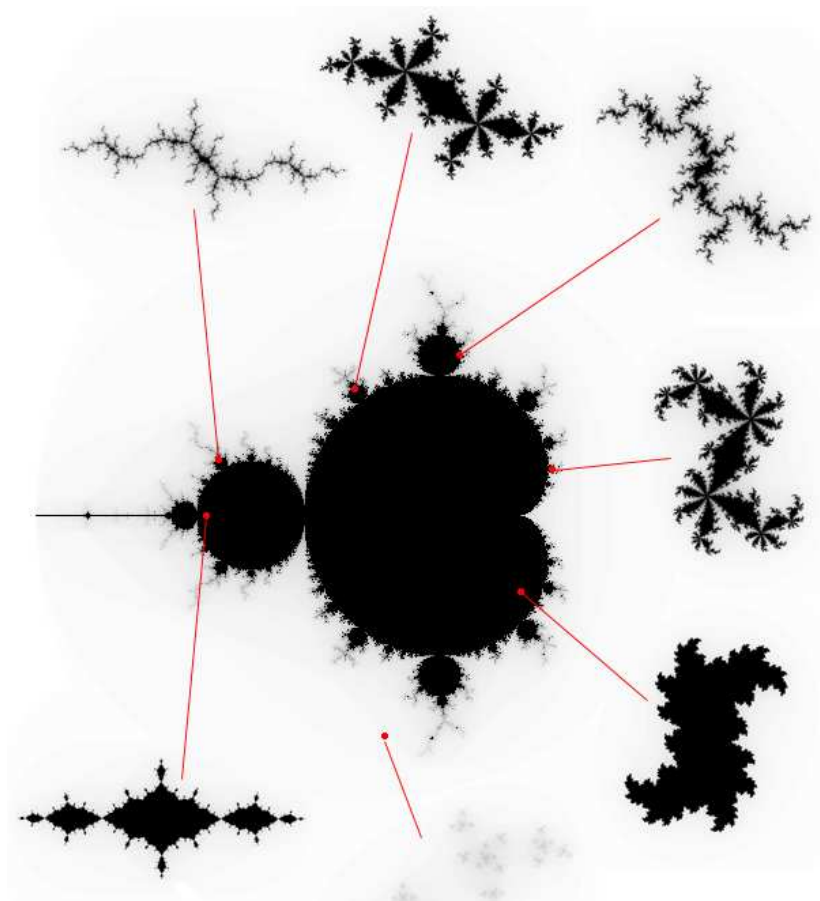


Figura 7.7: Si illustra che l'insieme di Mandelbrot consiste in tutti i $c \in \mathbb{C}$ per cui l'insieme di Julia $J(f_c)$ è connesso [6].

7.3 Dimensione di Hausdorff

Secondo Benoît Mandelbrot, che ha introdotto la terminologia nel 1975, un frattale è un sottoinsieme di uno spazio euclideo che ha una dimensione di Hausdorff superiore alla sua dimensione topologica. Intuitivamente è chiaro che cosa si intende con il concetto di dimensione. Un singolo punto ha dimensione zero. Una curva regolare (a tratti) in \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 ha dimensione 1. Una superficie regolare (a tratti) ha dimensione 2, ecc. Una varietà, che localmente è topologicamente equivalente allo spazio euclideo \mathbb{R}^n , è detta di avere la dimensione n .

Definizione 7.3.1. Sia X uno spazio topologico.² Lo spazio X è detto di avere la dimensione topologica n se ogni ricoprimento aperto di X ha un raffinamento aperto tale che ogni punto $x \in X$ è contenuto in al massimo $n + 1$ insiemi del raffinamento. Oppure: Se $X = \cup_j U_j$ per una famiglia di sottoinsiemi aperti U_j in X , allora esiste un'altra famiglia di sottoinsiemi aperti V_k in X tali che

- a. $X = \cup_k V_k$,
- b. ogni V_k è contenuto in un opportuno $U_{j(k)}$,
- c. ogni $x \in X$ appartiene ad al massimo $n + 1$ insiemi V_k .

Per esempio, la circonferenza ha dimensione 1, poichè ogni suo ricoprimento aperto ha un raffinamento di archi aperti tali che ogni punto della circonferenza è contenuto in soltanto uno o due tali archi. La superficie sferica ha dimensione 2, poichè ogni suo ricoprimento aperto ha un raffinamento di dischi aperti (sulla superficie) tali che ogni punto della superficie sferica è contenuto in uno, due o tre di tali dischi. Infine un esempio estremo: La dimensione topologica di un punto vale zero, poichè ogni suo ricoprimento aperto ha un raffinamento che consiste in un singolo insieme aperto. Secondo un teorema di Lebesgue, le superfici regolari (a tratti) di dimensione *intuitiva* n hanno anche la dimensione topologica n . La dimensione topologica è sempre un numero intero non negativo oppure infinito.

Nel 1918 Felix Hausdorff (1868-1942) ha introdotto un'altra nozione di dimensione, ora detta dimensione di Hausdorff. Al contrario alla dimensione topologica, la dimensione di Hausdorff dipende dalla metrica (cioè, dalle distanze) in X e non soltanto dalla totalità di tutti i suoi sottoinsiemi aperti.³ Per $\rho > 0$, sia $N(\rho)$ il numero di palle di raggio ρ che ci vuole per coprire X .

²Diciamo, per semplicità, sia X un sottoinsieme di uno spazio euclideo.

³Per semplicità, sia X un sottoinsieme di uno spazio euclideo.

Quindi, X può essere coperto da $N(\rho)$ di tali palle ma non da $N(\rho) - 1$ di tali palle. Se d fosse la dimensione di X , si aspetta un comportamento del tipo

$$N(\rho) \sim \frac{1}{\rho^d}, \quad \rho \rightarrow 0^+.$$

Esempio 7.1. L'insieme finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ in \mathbb{R}^d può essere coperto da esattamente n palle di raggio ρ se $0 < 2\rho < \min\{\|x_j - x_k\| : j \neq k\}$. Di conseguenza, la sua dimensione di Hausdorff vale zero.

Esempio 7.2. Per $X = [0, 1]$ abbiamo

$$N(\rho) = 1 + \min \left\{ n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{2\rho} \right\}.$$

Dalla disuguaglianza $(1/2\rho) < N(\rho) \leq (1/2\rho) + 1$ segue $d = 1$.

Esempio 7.3. La palla di raggio ρ in \mathbb{R}^d ha il volume $c(d)\rho^d$, dove $c(d)$ è un'opportuna costante positiva.⁴ Quindi per un aperto U in \mathbb{R}^n di misura μ abbiamo $N(\rho) \approx (\mu/c(d)\rho^d)$. Di conseguenza, un aperto in \mathbb{R}^d ha dimensione di Hausdorff uguale a d .

Formalmente, sia X uno spazio metrico, cioè esiste una metrica (una distanza) tra punti di X che è positiva tra due punti diversi, è simmetrica tra i due punti e verifica la disuguaglianza triangolare.⁵ Definiamo ora il *contenuto di Hausdorff* nel seguente modo:

$$C_H^d(X) = \inf \left\{ \sum_j [r_j]^d : X = \cup_j \{x \in X : d(x_j, x) < r_j\} \right\},$$

dove l'estremo inferiore viene calcolato al variare dei centri $x_j \in X$. Allora la *dimensione di Hausdorff*, $\dim_H(X)$, viene definita da

$$\dim_H(X) = \inf \{d \geq 0 : C_H^d(X) = 0\}.$$

La dimensione di Hausdorff non può essere inferiore a quella topologica.

Nella seguente tabella (in cui d_F è la costante di Feigenbaum) elenchiamo le dimensioni di Hausdorff di alcuni frattali.

⁴ $c(1) = 2$, $c(2) = \pi$, $c(3) = \frac{4}{3}\pi$.

⁵La metrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ ha le seguenti proprietà: 1) $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$, 2) $d(x, y) = d(y, x)$, e 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Per semplicità, per X si può prendere un sottoinsieme di \mathbb{R}^n con la distanza euclidea $d(x, y) = \|x - y\|$.

frattale	dim. Hausdorff	appross.	dim. top.
insieme di Cantor	$\ln(2)/\ln(3)$	0,6309	0
curva di Koch	$\ln(4)/\ln(3)$	1,2619	1
triangolo di Sierpiński	$\ln(3)/\ln(2)$	1,5850	1
frontiera dell'insieme di Mandelbrot	2	2,0000	1
diagramma di biforcazione della mappa logistica	$\ln(2)/\ln(d_F)$	0,4498	1
tappeto di Sierpiński	$\ln(8)/\ln(3)$	1,8928	1

Introduciamo ora un metodo per calcolare le dimensioni di Hausdorff dei frattali che hanno una stretta self-similarity. Una mappa $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *similarity* se ha la forma $\psi(x) = x_0 + r(U(x) - x_0)$ per un'opportuna costante $0 < r < 1$, un opportuno punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ed un'opportuna isometria U . Dato un numero finito di similarity ψ_1, \dots, ψ_m , esiste un unico sottoinsieme K di \mathbb{R}^n tale che

$$\bigcup_{j=1}^m \psi_j(K) = K.$$

Se r_1, \dots, r_m sono le costanti di contrazione delle similarity ψ_1, \dots, ψ_m , allora la dimensione di Hausdorff d di K segue dall'equazione

$$\sum_{j=1}^d [r_j]^d = 1. \quad (7.2)$$

Una condizione necessaria, la cosiddetta *open set condition*, per poter applicare questo risultato è l'esistenza di un sottoinsieme aperto e limitato V di \mathbb{R}^n tale che

$$\bigcup_{j=1}^m \psi_j(V) \subset V. \quad (7.3)$$

Applichiamo il risultato prima all'insieme di Cantor K . Ponendo

$$\psi_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad \psi_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1) = \frac{1}{3}(2 + x),$$

si ottiene $\psi_1(K) \cup \psi_2(K) = K$. Inoltre, vale la cosiddetta open set condition per $V = (0, 1)$. Siccome $r_1 = r_2 = \frac{1}{3}$, la dimensione di Hausdorff d di K segue dall'equazione

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d = 1,$$

cioè $\ln(2) - d \ln(3) = 0$ e quindi $d = (\ln(2)/\ln(3))$.

Consideriamo ora il triangolo di Sierpiński \mathbf{K} . Siano x_1, x_2 e x_3 le vertici del triangolo di partenza e ψ_1, ψ_2 e ψ_3 le seguenti similarity:

$$\psi_j(x) = x_j + \frac{1}{2}(x - x_j), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad j = 1, 2, 3.$$

Sia V la regione aperta che ha il triangolo di base come la sua frontiera. In tal caso vale la open set condition, mentre

$$\psi(\mathbf{K}) \cup \psi_2(\mathbf{K}) \cup \psi_3(\mathbf{K}) = \mathbf{K}.$$

Dunque la dimensione di Hausdorff d di \mathbf{K} segue dall'equazione

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1,$$

cioè $\ln(3) - d\ln(2) = 0$ e quindi $d = (\ln(3)/\ln(2))$.

Applicare lo stesso metodo per calcolare le dimensione di Hausdorff del Tappeto di Sierpiński e del tetraedro di Sierpiński.⁶

⁶Cioè, del frattale costruito come il triangolo di Sierpiński partendo da un tetraedro.

Appendice A

Inversione locale e funzioni implicite

In questa appendice dimostriamo il teorema delle funzioni implicite e il teorema delle funzioni inverse [8, Sec. 7.5-7.6].

Durante le considerazioni in questo paragrafo indichiamo con $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ spazi di Banach. Come modello noi restringiamo spesso la nostra attenzione sul caso classico $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $Z = \mathbb{R}^\ell$.

Teorema A.1. Sia $f \in C^k(U : Y)$ dove $U \subset X$ è un aperto.¹ Fissiamo $x^0 \in U$ e poniamo $y^0 = f(x^0)$. Sia $df(x^0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ il differenziale della f in x^0 .

i) Se $df(x^0)$ ammette inverso destro $A_r \in \mathcal{L}(Y, X)$

$$df(x^0) \circ A_r = I_Y \quad (\text{A.1})$$

allora esistono due intorni aperti $V \ni x^0$ e W di y^0 e una applicazione $g \in C^k(W : V)$, con $dg(y^0) = A_r$, e tali che

$$f \circ g = I_W, \quad \text{cioè} \quad f(g(y)) = y, \quad y \in W. \quad (\text{A.2})$$

ii) Se $df(x^0)$ ammette inverso sinistro $A_\ell \in \mathcal{L}(X, Y)$

$$A_\ell \circ df(x^0) = I_X \quad (\text{A.3})$$

allora esistono due intorni aperti $V \ni x^0$ e W di y^0 e una applicazione $g \in C^k(V : W)$, con $dg(y^0) = A_\ell$, e tali che

$$g \circ f = I_V, \quad \text{cioè} \quad g(f(x)) = x, \quad x \in V. \quad (\text{A.4})$$

¹ $C^k(U : Y)$ è l'insieme di tutte le funzioni $f : U \rightarrow Y$ derivabili k volte con la derivata k -esima continua. La continuità si intende rispetto alla norma di Y .

iii) Infine, se $X = Y$, $df(x^0)$ è biettiva e ammette inverso $A \in \mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$ (che è sia destro sia sinistro).

$$A \circ df(x^0) = df(x^0) \circ A = I_X, \quad (\text{A.5})$$

allora esistono due intorni aperti $V \ni x^0$ e W di y^0 e tali che $f : V \rightarrow W$ è biunivoca (biiettiva) e la sua inversa applicazione $g = f^{-1} : W \rightarrow V$ soddisfa $g \in C^k(V : W)$, con $dg(y^0) = A_\ell$, cioè

$$g \circ f = I_V, \quad \text{cioè } g(f(x)) = x, \quad x \in V \quad (\text{A.6a})$$

$$f \circ g = I_W, \quad \text{cioè } f(g(y)) = y, \quad y \in W \quad (\text{A.6b})$$

Dimostrazione. Possiamo supporre senza perdere la generalità che $x^0 = 0 = 0_X$ e $y^0 = 0 = 0_Y$ (altrimenti cambiamenti tramite traslazioni $x \rightarrow x - x^0$, $y \rightarrow y - y^0$).

Consideriamo i). Evidentemente si ha

$$g(y) = A_r(y + S(y)), \quad S \in C^k(W : Y), \quad \|S(y)\|_Y = o(\|y\|). \quad (\text{A.7})$$

Sostituendo in (A.2), si ottiene la seguente equazione per l'incognita $S(y)$

$$\begin{aligned} S(y) &= -\tilde{R}(y + S(y)), & y \in W \\ \tilde{R}(z) &= R(A_r z). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Osserviamo che poichè $R(0) = 0$, $dR(0) = 0$ si ha $\|R(x)\|_Y = o(\|x\|_X)$, $x \rightarrow 0$, e quindi anche $\|\tilde{R}(y)\|_Y = o(\|y\|_Y)$, $y \rightarrow 0$. Di conseguenza, per ogni $\varepsilon_0 > 0$ esiste $\delta_0 > 0$ tale che $D_{\delta_0} := \{y; \|y\|_Y \leq \delta_0\} \subset W$ e

$$\|\tilde{R}(y)\|_Y \leq \varepsilon_0 \|y\|_Y, \quad y \in D_\delta \quad (\text{A.9a})$$

$$\|d\tilde{R}(y)\|_{\mathcal{L}(Y, Y)} \leq \varepsilon_0, \quad y \in D_\delta \quad (\text{A.9b})$$

La soluzione S come limite delle approssimazioni successive di uno schema iterativo:

$$\begin{aligned} S_{j+1}(y) &= -\tilde{R}(y + S_j(y)), & j \in \mathbb{Z}_+ \\ S_0(y) &= -\tilde{R}(y). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Dimostriamo che esiste un $0 < \delta \ll 1$ tale che S_j sono ben definiti in D_δ per ogni $j \in \mathbb{Z}_+$ e la successione S_j converge uniformemente in D_δ a una S (e quindi $S \in C(D_\delta : X)$). Osserviamo che

$$\text{labelA.11} \|S_0(y)\|_X = \|\tilde{R}(y)\|_X \leq \varepsilon_0 \|y\| \leq \varepsilon_0 \delta, \quad (\text{A.11})$$

se $y \in D_\delta$, $\delta \in]0, \delta_0[$. Fissiamo $\varepsilon_0 \in]0, 1[$.

Ragioniamo per induzione. Supponiamo che per un certo $M_\delta > \varepsilon_0 \delta$ che soddisfa

$$\delta + M_\delta \leq \delta_0 \quad (\text{A.12})$$

sia valida le stima

$$\|S_k(y)\|_Y \leq M_\delta, \quad y \in D_\delta, k \in \mathbb{Z}_+. \quad (\text{A.13})$$

Dalle (A.10), (A.13) e (A.9a) si ha

$$\|S_{k+1}(y)\|_Y \leq \varepsilon_0 \|y + S_k(y)\|_Y \leq \varepsilon_0(\delta + M_\delta) \leq M_\delta \quad (\text{A.14})$$

se M_δ soddisfa

$$M_\delta \leq \frac{\varepsilon_0 \delta}{1 - \varepsilon_0} \quad (\text{A.15})$$

Per esempio, se fissiamo

$$M_\delta = \frac{\varepsilon_0 \delta}{1 - \varepsilon_0},$$

dalla (A.12) si ottiene che necessariamente

$$\delta \leq \delta_0(1 - \varepsilon_0).$$

In altre parole, abbiamo dimostrato che se per M_δ valgono la (A.12) e la (A.15), la (A.13) è vera per ogni $k \in \mathbb{Z}_+$.

Poi, consideriamo $S_{j+1} - S_j$. Si ha, usando la formula di Taylor e il resto in forma integrale

$$\begin{aligned} \|S_{j+1}(y) - S_j(y)\|_Y &\leq \int_0^1 \|d\tilde{R}(y + S_j(y) + t(S_{j+1}(y) - S_j(y)))\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} dt \\ &\quad \times \|S_j(y) - S_{j-1}\|_Y \\ &\leq \varepsilon_0 \|S_j(y) - S_{j-1}\|_Y, \quad y \in D_\delta, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

che implica (di nuovo per induzione)

$$\begin{aligned} \|S_{j+1}(y) - S_j(y)\|_Y &\leq \varepsilon_0^j \|S_1(y) - S_0(y)\|_Y \\ &\leq \varepsilon_0^j \|d\tilde{R}\|_{C(D_{\delta_0}; \mathcal{L}(Y,Y))} \|\tilde{R}\|_{C(D_\delta; Y)} \\ &\leq \varepsilon_0^{j+1} \|\tilde{R}\|_{C(D_\delta; Y)}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Dalla (A.17) ne segue che la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} (S_{j+1}(y) - S_j(y))$$

converge totalmente in D_δ con la serie maggiorante

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_0^{j+1} \|\tilde{R}\|_{C(D_\delta; Y)} = \frac{\varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} \|\tilde{R}\|_{C(D_\delta; Y)}.$$

Poichè

$$S_{j+1}(y) = S_0(y) + \sum_{k=0}^j (S_{k+1}(y) - S_k(y))$$

la convergenza uniforme di S_j è evidente.

Per ora abbiamo trovato una $S(y)$ soluzione continua. Per la differenziabilità, scriviamo per un y nell'interno di D_δ e $h \in Y$, $\|h\|_Y \ll 1$:

$$\begin{aligned} T(y, h) &= S(y+h) - S(y) \\ &= -\tilde{R}(y+h+S(y+h)) + \tilde{R}(y+S(y)) \\ &= -\left(\tilde{R}(y+h+S(y+h)) - \tilde{R}(y+h+S(y))\right) \\ &\quad + \left(-\tilde{R}(y+h+S(y)) + \tilde{R}(y+S(y))\right) \\ &= -\left(\int_0^1 (d\tilde{R}(y+h+S(y) + t(S(y+h) - S(y)))) dt\right) T(y, h) \\ &\quad + \left(-\int_0^1 (d\tilde{R}(y+S(y) + th)) dt\right) h \\ &= -\left(d\tilde{R}(y+S(y)) + \theta_1(y, h)\right) T(y, h) \\ &\quad + -d\tilde{R}(y+S(y))h - \Theta_1(y, h), \end{aligned} \tag{A.18}$$

dove

$$\begin{aligned} \theta_1(y, h) &= \int_0^1 (d\tilde{R}(y+h+(1-t)S(y) + tS(y+h)) - d\tilde{R}(y+S(y))) dt \\ &= o(1), \end{aligned} \tag{A.19a}$$

$$\begin{aligned} \Theta_1(y, h) &= \left(\int_0^1 (d\tilde{R}(y+S(y) + th) - d\tilde{R}(y+S(y))) dt\right) h \\ &= o(\|h\|_Y) \end{aligned} \tag{A.19b}$$

per $h \rightarrow 0$. Quindi, si ha

$$\left((1_Y + d\tilde{R}(y+S(y)) + \theta_1(y, h))\right) T(y, h) = -d\tilde{R}(y+S(y))h - \Theta_1(y, h) \tag{A.20}$$

Dalla (A.9b) segue che, dato $m \in]0, 1[$, esiste $\varepsilon_0 \ll 1 \ll 1$ e $0 < \delta \ll \delta_0$ tali che si ha

$$\|d\tilde{R}(y + S(y))\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} \leq \mu, \quad y \in D_\delta \quad (\text{A.21})$$

e quindi $1_Y + d\tilde{R}(y + S(y))$ è invertibile, il suo inverso è continuo e

$$\|(1_Y + d\tilde{R}(y + S(y)))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} \leq (1 - \mu)^{-1}, \quad y \in D_\delta. \quad (\text{A.22})$$

Dalla (A.22) e dalla dipendenza continua da y e da $h \rightarrow 0$ si ottiene che $1_Y + d\tilde{R}(y + S(y)) + \theta_1(y, h)$ è invertibile per $h \rightarrow 0$ (y fissato), il suo inverso è continuo e

$$(1_Y + d\tilde{R}(y + S(y)) + \theta_1(y, h))^{-1} = 1_Y + d\tilde{R}(y + S(y))^{-1} + o(1) \quad (\text{A.23})$$

in $\mathcal{L}(Y, Y)$ per $h \rightarrow 0$, $y \in D_\delta$. Quindi,

$$\begin{aligned} T(y, h) &= S(y + h) - S(y) \\ &= -(1_Y + d\tilde{R}(y + S(y)) + \theta_1(y, h))^{-1} \circ d\tilde{R}(y + S(y))[h] \\ &\quad + o(\|h\|_Y) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

cioè

$$dS(y) = -(1_Y + d\tilde{R}(y + S(y)) + \theta_1(y, h))^{-1} \circ d\tilde{R}(y + S(y)). \quad (\text{A.25})$$

In modo analogo si dimostra che $S \in C^k$ se $R \in C^k$ per $k \geq 2$.

Per quanto riguarda la parte per l'inverso sinistro, basta porre

$$g(y) = A_\ell y + S(A_\ell y), \quad (\text{A.26})$$

dove l'incognita $S(x)$ è $C^k(U^0 : X)$, U^0 un piccolo intorno di 0 (da definire). Tenendo conto dell'identità $A_\ell df(0) = I_X$ e che g deve soddisfare $g(f(x)) = x$ si ottiene

$$x + A_\ell R(x) + S(x + A_\ell R(x)) = x \quad (\text{A.27})$$

cioè

$$S(x + A_\ell R(x)) = -A_\ell R(x) \quad (\text{A.28})$$

Osserviamo, che grazie a (A.9a), $I_X + A_\ell R$ è biiettivo in

$$B_\delta = \{x \in X : \|x\| \leq \delta\}, \quad 0 < \delta \leq \delta_0. \quad (\text{A.29})$$

e $(I + A_\ell \circ R)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$. Quindi, possiamo fare il cambiamento delle variabili

$$z = x + A_\ell R(x), \quad x = (I_X + A_\ell \circ R)^{-1}(z) = z + \Psi(z), \quad (\text{A.30})$$

In base al teorema di Rouché-Capelli, se la matrice A dei coefficienti di y_1, y_2, \dots, y_m non singolare allora dal sistema lineare si possono ricavare y_1, y_2, \dots, y_m in termini di x_1, x_2, \dots, x_n .

Se indichiamo con g_1, g_2, \dots, g_m i primi membri del sistema (A.36), la matrice A coincide con la matrice Jacobiana di g_1, \dots, g_m rispetto a y_1, \dots, y_m , che indicheremo con $\nabla_y g$ o g_y . Il determinante di $\nabla_y g$ si indica spesso col simbolo

$$\frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_m)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)}.$$

Il prossimo teorema afferma che se $\det \nabla_y g(x, y) \neq 0$ in un punto (x^0, y^0) , allora in un suo intorno sia possibile esplicitare y in funzione di x nella (A.34).

Teorema A.2. Sia $g : \mathbb{R}^{n+m} \ni A \mapsto \mathbb{R}^m$, A aperto. Supponiamo che

i) $g \in C^k(A)$, $k \geq 1$.

ii) nel punto $(x^0, y^0) \in A$ si abbia $g(x^0, y^0) = 0$ e

$$\det D_y g(x^0, y^0) \neq 0.$$

Allora esiste un intorno V di x^0 ed un'unica funzione $y = f(x)$, $f : V \mapsto \mathbb{R}^m$, tale che: $f \in C^k(V)$, $f(x^0) = y^0$ e

$$g(x, f(x)) = 0, \quad x \in V. \quad (\text{A.37})$$

Inoltre vale la seguente formula che assegna la matrice Jacobiana di f :

$$\nabla_x f(x^0) = -(\nabla_y g(x^0, y^0))^{-1} \nabla_x g(x^0, y^0) \quad (\text{A.38})$$

Appendice B

3-ciclo implica caos

Nel 1964 Šarkovs'kii [16] ha dimostrato il seguente teorema.¹ Per capirlo bisogna introdurre il seguente ordinamento dei numeri naturali:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & \triangleleft & 2 & \triangleleft & 2^2 & \triangleleft & 2^3 & \triangleleft & 2^4 & \triangleleft & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \triangleleft & 2^3 \cdot 9 & \triangleleft & 2^3 \cdot 7 & \triangleleft & 2^3 \cdot 5 & \triangleleft & 2^3 \cdot 3 & \dots \\
 \dots & \dots & \triangleleft & 2^2 \cdot 9 & \triangleleft & 2^2 \cdot 7 & \triangleleft & 2^2 \cdot 5 & \triangleleft & 2^2 \cdot 3 & \dots \\
 \dots & \dots & \triangleleft & 2 \cdot 9 & \triangleleft & 2 \cdot 7 & \triangleleft & 2 \cdot 5 & \triangleleft & 2 \cdot 3 & \dots \\
 \dots & \dots & \triangleleft & 9 & \triangleleft & 7 & \triangleleft & 5 & \triangleleft & 3 & \dots
 \end{array}$$

Teorema B.1 (Šarkovs'kii). Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e supponiamo che la F ha un k -ciclo. Allora la F ha un l -ciclo per ogni intero l tale che $l \triangleleft k$. In particolare, se esiste un 3-ciclo per la F , allora esiste un l -ciclo per qualunque intero l .

Il teorema implica che esiste un ciclo di periodo doppio $2p$ se ne esiste uno di periodo p se p non è una potenza di due. Inoltre, se esiste un ciclo di periodo $p = 2^m q$ ($m = 0, 1, 2, \dots$, $q > 1$ dispari), allora esiste un ciclo di periodo $2^n r$ per qualunque $n = 0, 1, 2, \dots$ e qualunque numero dispari $r > q$. Il teorema non vale per le mappe $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ multidimensionali.

Esempio B.1. Sia $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$F(x) = \frac{1-x}{1+ax}$$

per un'opportuna costante $a > 0$. In tal caso $-1 + \sqrt{1+a}$ è l'unico punto fisso. Inoltre,

$$F^2(x) = F(F(x)) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+ax}}{1 + a \frac{1-x}{1+ax}} = x.$$

¹Una dimostrazione elementare si trova in [12].

Dunque, tutti i punti di $[0, 1]$ tranne $-1 + \sqrt{1+a}$ hanno periodo 2. Non ci sono punti di altro periodo.

Esempio B.2. Consideriamo la mappa $F : [1, 3] \rightarrow [1, 3]$ definita da

$$F(x) = \begin{cases} x + 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ -2x + 7, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Allora

$$F^2(x) = F(F(x)) = \begin{cases} -2x + 5, & 1 \leq x \leq 2, \\ 4x - 7, & 2 \leq x \leq 2.5, \\ -2x + 8, & 2.5 \leq x \leq 3; \end{cases}$$

$$F^3(x) = F(F^2(x)) = \begin{cases} 4x - 3, & 1 \leq x \leq 1.5, \\ -2x + 6, & 1.5 \leq x \leq 2, \\ 4x - 6, & 2 \leq x \leq 2.25, \\ -8x + 21, & 2.25 \leq x \leq 2.5, \\ 4x - 9, & 2.5 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Allora F ha il punto fisso $\frac{7}{3}$, F^2 ha i punti fissi $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$ e $\frac{8}{3}$, e F^3 ha i punti fissi 1, 2, $\frac{7}{3}$ e 3. Quindi ci sono due punti di periodo 2 e tre punti di periodo 3. Secondo il Teorema di Šarkovs'kii esistono punti di qualunque periodo.

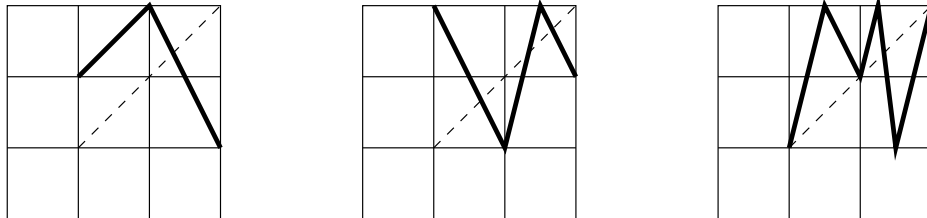


Figura B.1: La mappa F e il suo secondo e terzo iterato.

Esempio B.3. Esistono degli esempi delle mappe unidimensionali che hanno punti di equilibrio di periodo 5 ma non di periodo 3. Infatti, sia $F : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$ la mappa definita da

$$F(x) = \begin{cases} 2x + 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ -x + 7, & 2 \leq x \leq 3, \\ -2x + 10, & 3 \leq x \leq 4, \\ -x + 6, & 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Allora la F è continua con punto di equilibrio unico $10/3$. Si verifica che

$$F^2(x) = F(F(x)) = \begin{cases} -4x + 8, & 1 \leq x \leq 1.5, \\ -2x + 5, & 1.5 \leq x \leq 2, \\ x - 1, & 2 \leq x \leq 3, \\ 4x - 10, & 3 \leq x \leq 3.5, \\ 2x - 3, & 3.5 \leq x \leq 4, \\ -2x + 13, & 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

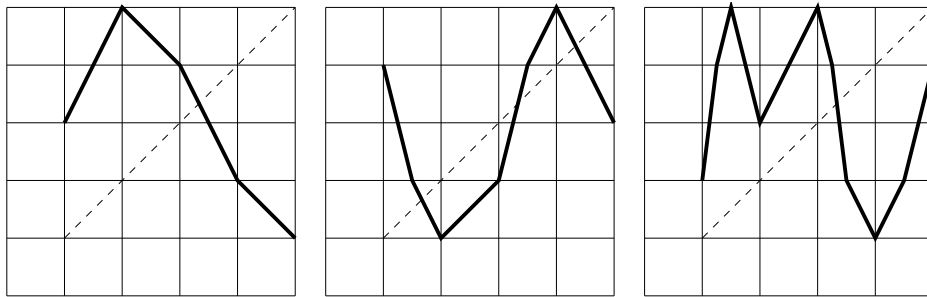


Figura B.2: Grafici delle mappe F , F^2 e F^3 . I punti fissi sono i seguenti: $\frac{10}{3}$ per la F , $\frac{5}{3}$, $\frac{10}{3}$ e $\frac{13}{3}$ per la F^2 e $\frac{10}{3}$ per la F^3 . Inoltre, $F(\frac{5}{3}) = \frac{13}{3}$ e $F(\frac{13}{3}) = \frac{5}{3}$.

Inoltre,

$$F^3(x) = F(F^2(x)) = \begin{cases} 8x - 6, & 1 \leq x \leq 1.25, \\ 4x - 1, & 1.25 \leq x \leq 1.5, \\ -4x + 11, & 1.5 \leq x \leq 2, \\ 2x - 1, & 2 \leq x \leq 3, \\ -4x + 17, & 3 \leq x \leq 3.25, \\ -8x + 30, & 3.25 \leq x \leq 3.5, \\ -2x + 9, & 3.5 \leq x \leq 4, \\ 2x - 7, & 4 \leq x \leq 4.5, \\ 4x - 16, & 4.5 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Siccome la F^3 ha un singolo punto di equilibrio (che, per forza, condivide con la F), non esistono punti di periodo 3 della F .

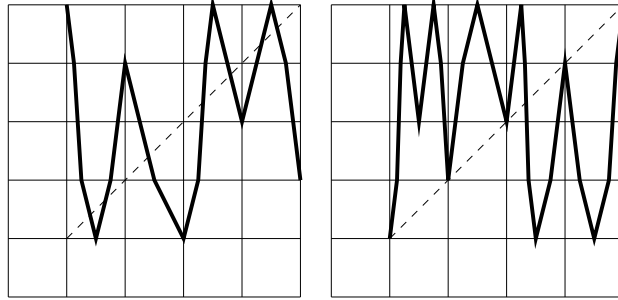


Figura B.3: Grafici delle mappe F^4 e F^5 . I punti fissi sono i seguenti: $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{19}{5}$, $\frac{13}{3}$ e $\frac{23}{5}$ per la F^4 e 1, 2, 3, $\frac{10}{3}$, 4 e 5 per la F^5 .

Consideriamo ora la F^4 :

$$F^4(x) = F^2(F^2(x)) = \begin{cases} -8x + 13, & 1 \leq x \leq 1.125, \\ -16x + 22, & 1.125 \leq x \leq 1.25, \\ -4x + 7, & 1.25 \leq x \leq 1.5, \\ 4x - 5, & 1.5 \leq x \leq 1.75, \\ 8x - 12, & 1.75 \leq x \leq 2, \\ -4x + 12, & 2 \leq x \leq 2.5, \\ -2x + 7, & 2.5 \leq x \leq 3, \\ 4x - 11, & 3 \leq x \leq 3.25, \\ 16x - 50, & 3.25 \leq x \leq 3.375, \\ 8x - 23, & 3.375 \leq x \leq 3.5, \\ -4x + 19, & 3.5 \leq x \leq 4, \\ 4x - 13, & 4 \leq x \leq 4.5, \\ -4x + 23, & 4.5 \leq x \leq 4.75, \\ -8x + 42, & 4.75 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

mentre

$$\frac{7}{5} \xrightarrow{F} \frac{19}{5} \xrightarrow{F} \frac{12}{5} \xrightarrow{F} \frac{23}{5} \xrightarrow{F} \frac{7}{5}.$$

Inoltre,

$$F^5(x) = F^2(F^3(x)) = \begin{cases} 8x - 7, & 1 \leq x \leq 1.125, \\ 32x - 34, & 1.125 \leq x \leq 1.1875, \\ 16x - 15, & 1.1875 \leq x \leq 1.25, \\ -8x + 15, & 1.25 \leq x \leq 1.5, \\ 8x - 9, & 1.5 \leq x \leq 1.75, \\ -8x + 19, & 1.75 \leq x \leq 1.875, \\ -16x + 34, & 1.875 \leq x \leq 2, \\ 8x - 14, & 2 \leq x \leq 2.25, \\ 4x - 5, & 2.25 \leq x \leq 2.5, \\ -4x + 15, & 2.5 \leq x \leq 3, \\ 8x - 21, & 3 \leq x \leq 3.25, \\ -16x + 57, & 3.25 \leq x \leq 3.3125, \\ -32x + 110, & 3.3125 \leq x \leq 3.375, \\ -8x + 29, & 3.375 \leq x \leq 3.5, \\ 4x - 13, & 3.5 \leq x \leq 3.75, \\ 8x - 28, & 3.75 \leq x \leq 4, \\ -8x + 36, & 4 \leq x \leq 4.25, \\ -4x + 19, & 4.25 \leq x \leq 4.5, \\ 4x - 17, & 4.5 \leq x \leq 4.75, \\ 16x - 74, & 4.75 \leq x \leq 4.875, \\ 8x - 35, & 4.875 \leq x \leq 5, \end{cases}$$

mentre

$$1 \xrightarrow{F} 3 \xrightarrow{F} 4 \xrightarrow{F} 2 \xrightarrow{F} 5 \xrightarrow{F} 1.$$

Quindi i punti fissi della F^5 sono gli interi 1, 2, 3, 4, 5 più il punto fisso $\frac{10}{3}$ della F . Di conseguenza, la F ha il punto fisso $\frac{10}{3}$, i due punti $\frac{5}{3}$ e $\frac{13}{3}$ di periodo 2, nessun punto di periodo 3, i punti $\frac{7}{5}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{19}{5}$ e $\frac{23}{5}$ di periodo 4 e i punti 1, 2, 3, 4, 5 di periodo 5. Secondo il Teorema di Šarkov'skii esistono punti di qualunque periodo tranne 3.

Il teorema di Šarkov'skii vale soltanto per le funzioni continue che trasformano un intervallo della retta reale in se stesso. Non vale per i domini multidimensionali, neanche per le circonferenze. Per esempio, per la rotazione antioraria di angolo $2\pi/3$ l'intera circonferenza consiste in punti di periodo 3, non ci sono punti di altri periodi o punti aperiodici.

Appendice C

Esempi ed esercizi

In questa appendice si discutono alcuni esempi illustrativi difficili da inserire nei capitoli precedenti. Inoltre è stato incluso un elenco di esempi.

C.1 Esempi

Esempio C.1. Consideriamo

$$x'(t) = a - x^2.$$

In tal caso

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{a} \frac{x(0)[1 + e^{-2t\sqrt{a}}] + \sqrt{a}[1 - e^{-2t\sqrt{a}}]}{x(0)[1 - e^{-2t\sqrt{a}}] + \sqrt{a}[1 + e^{-2t\sqrt{a}}]}, & a > 0, \\ \frac{x(0)}{1 + tx(0)}, & a = 0, \\ \frac{\sqrt{-a} \frac{x(0) - \sqrt{-a} \tan[t\sqrt{-a}]}{\sqrt{-a} + x(0) \tan[t\sqrt{-a}]}, & a < 0. \end{cases}$$

Per $a < 0$ la soluzione $x(t)$ esiste soltanto in un intervallo temporale di lunghezza $< (\pi/|a|)$, poichè

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{|a|};$$

quindi per $a < 0$ non ci sono punti di equilibrio e non si possono prendere in considerazione le orbite per $t \rightarrow +\infty$.

Per $a = 0$ c'è un singolo punto di equilibrio asintoticamente stabile $x = 0$. Per $a > 0$ ci sono i due punti di equilibrio $\pm\sqrt{a}$, dove è asintoticamente stabile $x = \sqrt{a}$ e instabile $x = -\sqrt{a}$.

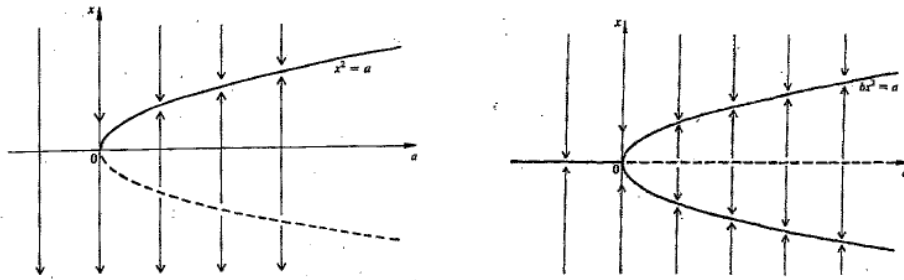


Figura C.1: Diagrammi di biforcazione per $x'(t) = a - x^2$ e per $x'(t) = ax - bx^3$ con $b > 0$. Le curve solide indicano i punti di equilibrio asintoticamente stabili, mentre le curve tratteggiate indicano quelli instabili.

Esempio C.2. Consideriamo

$$x'(t) = ax - bx^3,$$

dove $a \in \mathbb{R}$ e $b > 0$. In tal caso

$$x(t) = \begin{cases} \frac{x(0)\sqrt{a}}{\sqrt{a e^{-2at} + bx(0)^2[1 - e^{-2at}]}}, & a > 0, \\ \frac{x(0)}{\sqrt{1 + 2bx(0)^2t}}, & a = 0, \\ \frac{x(0)\sqrt{-a} e^{at}}{\sqrt{-a + bx(0)^2[1 - e^{2at}]}}, & a < 0. \end{cases}$$

Quindi $x(t) \rightarrow \text{sgn}[x(0)]\sqrt{a/b}$ se $a > 0$, e $x(t) \rightarrow 0$ se $a \leq 0$. Per $a \leq 0$ c'è il singolo punto di equilibrio $x = 0$ asintoticamente stabile, mentre per $a > 0$ sono asintoticamente stabili i punti di equilibrio $\pm\sqrt{a/b}$ e è instabile quello all'origine.

Esempio C.3. Consideriamo le equazioni del moto del pendolo con attrito

$$\theta'' = -k \sin(\theta) - h \theta',$$

dove $k = -(g/\ell)$ e h sono costanti positive. Il corrispondente sistema dinamico ha la forma

$$\begin{cases} \theta'_1 = \theta_2, \\ \theta'_2 = -k \sin(\theta_1) - h \theta_2. \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono $(m\pi, 0)$, dove $m \in \mathbb{Z}$. Intorno al punto di equilibrio $(0, 0)$ abbiamo il seguente sistema linearizzato:

$$\begin{pmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -h \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Siccome $\text{tr}(A) = -h < 0$ e $\det(A) = k > 0$, gli autovalori di A hanno una parte reale negativa (infatti, essi sono complessi coniugati se $h^2 < 4k$, coincidono con $-\frac{1}{2}h$ se $h^2 = 4k$ e sono ambedue negativi e diversi se $h^2 > 4k$). Quindi il sistema linearizzato è asintoticamente stabile. Quindi lo è anche il sistema non lineare originale. Infine, siccome la divergenza del vettore $(\theta_2, -k \sin(\theta_1) - h\theta_2)$ è strettamente negativa (di valore costante $-h$), non ci sono soluzioni periodiche [secondo il criterio di Bendixson].

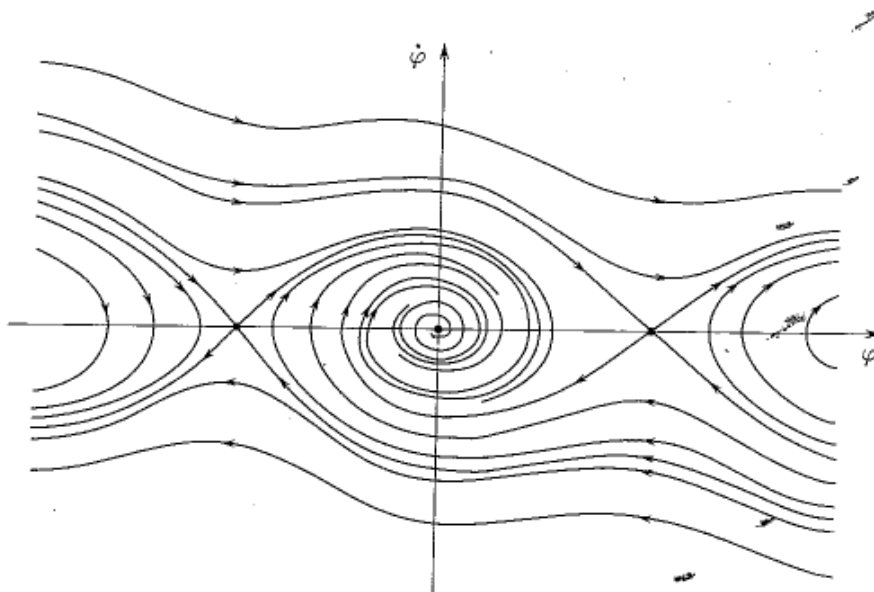


Figura C.2: Orbite per il pendolo con attrito [14, 5], dove $0 < h < 2\sqrt{k}$.

C.2 Esercizi

SISTEMI DINAMICI A TEMPO CONTINUO:

1. Risolvere le seguenti equazioni differenziali utilizzando il valor iniziale da costante di integrazione. Inoltre, determinare i punti di equilibrio e discuterne la natura.
 - a. $y' = e^y - 1$.
 - b. $y' = 1 - e^y$.
 - c. $y' = y^2(y - 2)$.
 - d. Al variare di $m \in \mathbb{R}$: $y' = y^3 - 2y^2 + my$.
 - e. $y' = -\sin(y)$.

f. $y' = -\tan(y)$.

2. Determinare la natura del punto di equilibrio $(0,0)$ per i seguenti sistemi dinamici:

- a. $x' = 2x + 3y, y' = -x - y$.
- b. $x' = 4x - 3y, y' = -8x - y$.
- c. $x' = -3x + 4y, y' = -2x + 3y$.
- d. $x' = -3x + y, y' = -x - y$.
- e. $x' = 3x + y, y' = x + 3y$.
- f. $x' = -2x + 3y, y' = 3x - 2y$.
- g. $x' = y, y' = -x + 2y$.
- h. $x' = x - y, y' = x + y$.

3. Determinare la natura del punto di equilibrio $(0,0)$ per le seguenti equazioni differenziali:

- a. $x'' + 2x' - 3x = 0$.
- b. $x'' - 6x' + 13x = 0$.
- c. $x'' + 6x' + 9x = 0$.
- d. $x'' + 16x = 0$.
- e. $x'' - 16x' = 0$.
- f. $x'' - 12x' + 45x = 0$.
- g. $x'' + 12x' + 36x = 0$.

4. Dimostrare che la funzione

$$E(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

è una costante del moto per il sistema dinamico

$$x' = -x - 2y, \quad y' = 2x + y.$$

5. Per una matrice reale A di ordine n si consideri il sistema dinamico

$$\vec{x}' = A\vec{x}.$$

Sia E una matrice reale e simmetrica di ordine n , cioè $E^T = E$.
Mostrare che

$$e(\vec{x}) = \vec{x}^T E \vec{x}$$

è una costante del moto del sistema dinamico $\vec{x}' = A\vec{x}$ se e solo se

$$EA + A^T E = 0_{n \times n}.$$

6. Classificare i punti di equilibrio e, col metodo di linearizzazione, determinarne la natura per il seguente sistema dinamico:

a. $x' = x^2 + y, y' = x - y^2$.

b. $x' = x + y^2 - 2, y' = x + y$.

c. $x' = -x + x^2y, y' = 2 - 2y$.

d. $x' = -x + 2x^3y^2, y' = -y$.

e. $x' = y - x^3, y' = -x^5$.

f. Al variare di $k \in \mathbb{R}$: $x' = y - xy^2, y' = -x + ky - y^3$ (soltanto per il punto di equilibrio all'origine).

g. $x' = x(y^2 - 1), y' = y(x^2 - 1)$.

7. Applicare il metodo di Liapunov per studiare la (in)stabilità del sistema dinamico

$$x' = y - x^3, \quad y' = -x^5.$$

Perchè non ci sono orbite chiuse? Quale risultato si otterrebbe utilizzando il metodo di linearizzazione?

8. Per una funzione reale $g \in C^1(\mathbb{R})$ che è positiva per $y \neq 0$ e verifica $g(0) = 0$, si consideri, per $k > 0$, l'equazione differenziale

$$y'' + ky' + g(y) = 0.$$

Determinare i punti di equilibrio e loro natura. Dimostrare la non esistenza di orbite chiuse e darne l'interpretazione fisica.

9. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} x' = x(2 - 2y), \\ y' = y(-1 + 5x + 3y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio (impegnativo!).

10. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} x' = x(12 - 2y - 3x), \\ y' = y(-19 + 5x + 3y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio (impegnativo!).

11. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} x' = x(2 - 2y - 3x), \\ y' = y(-1 + 5x + 3y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio (impegnativo!).

12. Studiare, per i seguenti sistemi dinamici, i punti di equilibrio e loro natura.

a. $x' = x^2 - y^2, y' = 2xy.$

b. $x' = e^y, y' = e^y \cos(x).$

c. $x' = e^y \sin(x), y' = e^y \cos(x).$

13. Dimostrare che il sistema dinamico non autonomo

$$\begin{cases} x'(t) = -2t y(t), \\ y'(t) = 2t x(t), \end{cases}$$

ha orbite chiuse che non corrispondono a soluzioni periodiche.

14. Passando alle coordinate polari si studiano i punti di equilibrio e le orbite del sistema dinamico

$$\begin{cases} x' = (x - y)(x^2 + y^2 - 1) - 2y, \\ y' = (y - x)(x^2 + y^2 - 1) + 2x. \end{cases}$$

15. Che cosa significa geometricamente per il sistema dinamico

$$\vec{y}' = \mathbf{F}(\vec{y}),$$

che $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$? Che cosa si può dire degli attractor? Rispondere alle stesse domande se $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$.

16. Studiare, per i seguenti sistemi dinamici, i punti di equilibrio e loro natura.

a. $x' = \arctan(x^2 + \lambda x + 9)$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. $x' = \arctan(x^4 + \lambda x^2 + 9)$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

c. $x' = x(\lambda - \sin(x))$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

17. Si consideri l'equazione differenziale

$$x''(t) = -U'(x), \quad U(x) = -2 \cos(3x).$$

Scrivendo quest'equazione come un sistema dinamico, determinare i punti di equilibrio, trovare una costante del moto (cioè, l'energia totale) e studiare le orbite (usando gli insiemi di livello $\{x \in \mathbb{R} : U(x) = c\}$).

18. Applicare il Teorema di Floquet al sistema dinamico

$$\vec{x}'(t) = \cos^2(2t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

In particolare, trovare il periodo delle soluzioni periodiche.

19. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} x' = x(8 - 2y - 3x), \\ y' = y(-13 + 5x + 3y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio (impegnativo!).

20. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} x' = x(8 - 3y - 2x), \\ y' = y(-13 + 3x + 5y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio (impegnativo!).

SISTEMI DINAMICI A TEMPO DISCRETO:

1. Studiare la (in)stabilità del sistema dinamico

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$$

nei seguenti casi:

- $A = c \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, al variare della costante $c > 0$. Per quale valore di c ci sono p -cicli?
- $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Ci sono p -cicli?
- $A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$. Ci sono p -cicli?
- $A = c \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, al variare di $c > 0$.

e. $A = c \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, al variare di $c > 0$.

2. Studiare la (in)stabilità del sistema dinamico $z_{n+1} = \alpha z_n$ nel piano complesso nei seguenti casi:

a. $\alpha = \frac{1}{2}c(-1 + i\sqrt{3})$ al variare di $c > 0$.

b. $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}c(-1 + i)$ al variare di $c > 0$.

c. $\alpha = \frac{1}{5}c(-3 + 4i)$ al variare di $c > 0$.

Per quali valori di $c > 0$ ci sono p -cicli?

3. Studiare la (in)stabilità delle seguenti equazioni alle differenze:

a. $x_{n+2} = x_n - x_{n+1}$.

b. $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n - x_{n+1})$.

c. $x_{n+3} = c^3 x_n$, al variare di $c > 0$.

d. $x_{n+2} = -x_n + c x_{n+1}$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.

4. Si consideri la relazione di ricorrenza

$$P_{n+2}(x) = \frac{2x}{n+2}P_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2}P_n(x),$$

dove $-1 \leq x \leq +1$. Per quali valori di x ci sono p -cicli?

5. Per $\omega > 0$ si consideri l'equazione alle differenze

$$x_{n+2} = -\omega^2 x_n.$$

Trovare tutte le soluzioni e tutti i p -cicli? Studiarne la (in)stabilità. Che cosa cambierebbe se aggiungessimo un termine di attrito ($k > 0$):

$$x_{n+2} = -k x_{n+1} - \omega^2 x_n?$$

6. Si consideri il sistema dinamico

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n},$$

dove $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Dimostrare, per induzione, che

$$x_n = \frac{n - (n-1)x_0}{n+1 - nx_0}.$$

e quindi che $x_n \rightarrow 1$ se $n \rightarrow +\infty$. Per quali valori iniziali x_0 avremmo qualche problema nel dimostrare una tale convergenza?

7. Si consideri il seguente analogo dello shift di Bernoulli:

$$\theta_{n+1} = \begin{cases} 3\theta_n, & 0 \leq \theta_n < \frac{1}{3}, \\ 3\theta_n - 1, & \frac{1}{3} \leq \theta_n < \frac{2}{3}, \\ 3\theta_n - 2, & \frac{2}{3} \leq \theta_n < 1. \end{cases}$$

Determinare i p -cicli?

8. Sia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ il cerchio unitario nel piano complesso e sia $F : S^1 \rightarrow S^1$ la rotazione

$$F(z; m) = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) z, \quad z \in S^1,$$

essendo $m = 1, 2, 3, \dots$ un parametro. Descrivere i p -cicli della mappa.

9. Si consideri la funzione continua $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$F(x) = \begin{cases} 2rx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2r(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

dove $0 < r \leq 1$ è un parametro. Determinare i punti di equilibrio e determinarne, al variare di r , la (in)stabilità. Determinarne i 2-cicli? Per quali valori di r esistono p -cicli per ogni p ?

10. Si consideri il sistema dinamico

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{1 + [x_n]^2},$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$. Trovare i punti di equilibrio e studiarne la (in)stabilità. Sugerimento: Scrivere $x_n = \tanh(w_n)$.

11. Sia $\phi : (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ la mappa $\phi(x) = \ln(x)/x$. Si consideri la seguente mappa $f : (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$:

$$\phi(f(x)) = \phi(x),$$

dove $f(x) \geq e$ per $1 < x \leq e$ e $1 < f(x) \leq e$ se $x \geq e$. Trovare tutti i punti fissi e tutti i 2-cicli e determinarne la (in)stabilità.

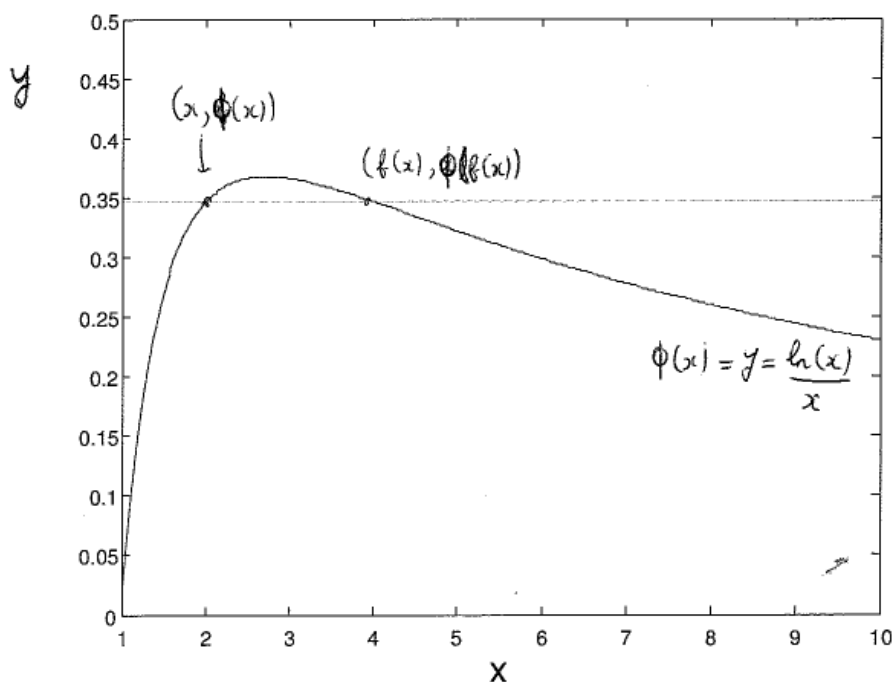


Figura C.3: La definizione della funzione f . Si noti che $f(2) = 4$ e $f(4) = 2$.

12. Per $\alpha = p + iq$ e $\beta = r + is$ (con $p, q, r, s \in \mathbb{R}$) si consideri il sistema dinamico

$$z_{n+1} = \alpha z_n + \beta \bar{z}_n$$

nel piano complesso. Dimostrare che il sistema dinamico è asintoticamente stabile se e solo se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} p+r & -q+s \\ q+s & p-r \end{pmatrix}$$

ha soltanto autovalori di modulo strettamente minore di 1. Suggerimento: Convertire il sistema dinamico in un sistema dinamico per $(x_n, y_n)^T$, dove $z_n = x_n + iy_n$.

13. La risoluzione dell'equazione differenziale $x'(t) = f(x)$ col metodo alle differenze finite conduce, per $h > 0$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$ con $f(0) = 0$ e $f'(0) \neq 0$, al sistema dinamico discreto

$$x_{n+1} = x_n + h f(x_n).$$

Determinare le condizioni su $f'(0)$ e h sotto cui il punto fisso $X = 0$ è asintoticamente stabile.

14. Determinare il bacino di attrazione del punto fisso $X = 0$ per il sistema dinamico¹

$$x_{n+1} = x_n - hx_n^3.$$

Trovare i 2-cicli e determinarne la (in)stabilità.

15. Si consideri il sistema dinamico discreto

$$x_{n+1} = F(x_n),$$

dove $F : [1, 4] \rightarrow [1, 4]$ è definita da $F(x) = \sqrt{6 + \frac{3}{2}x}$. Verificare se la F è una contrazione e, in tal caso, trovare il punto fisso. Studiare la sua (in)stabilità.

16. Si consideri il sistema dinamico discreto

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(x_n^2 + y_n^2), \\ y_{n+1} = -y_n(x_n^2 + y_n^2). \end{cases}$$

Determinare i punti fissi, i bacini di attrazione ed i cicli, più loro (in)stabilità. Suggerimento: Convertire il sistema dinamico in un sistema dinamico nel piano complesso.

17. Si consideri il sistema dinamico discreto

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(x_n^2 + y_n^2 - 1), \\ y_{n+1} = y_n(x_n^2 + y_n^2 - 1). \end{cases}$$

Determinare i punti fissi, i bacini di attrazione ed i cicli, più loro (in)stabilità. Suggerimento: Convertire il sistema dinamico in un sistema dinamico nel piano complesso.

18. Per $h > 0$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$ si consideri il sistema dinamico

$$y_{n+1} = y_n + hf'(y_n + hf'(y_n)),$$

il metodo predictor-corrector per risolvere l'equazione differenziale $y' = f(y)$ numericamente. Dimostrare la stabilità del punto di equilibrio $Y = 0$ nel caso $f(y) = -y^3$. Suggerimento: Partendo dal dato iniziale y_0 con $h[y_0]^2 < 1$, si dimostra che $0 < y_{n+1} < y_n$ oppure $0 > y_{n+1} > y_n$.

¹Un tale sistema dinamico risulta risolvendo l'equazione differenziale $x'(t) = -x^3$, di soluzione $x(t) = x(0)/\sqrt{1 + 2tx(0)^2}$, alle differenze finite.

19. Consideriamo l'insieme di tutti gli $x \in [0, 1]$ che hanno uno sviluppo decimale che consiste soltanto in cifre pari. Qual'è la dimensione di Hausdorff di questo frattale? Come si costruisce l'insieme?
20. Considerando la mappa $f_c(z) = z^2 + c$ e il sistema dinamico discreto $z_{n+1} = f_c(z_n)$, rispondere alle seguenti domande:
- Calcolare l'insieme di Julia (riempito) per $c = 0$. Dimostrare che $c = 0$ appartiene all'insieme di Mandelbrot.
 - Sia $c > \frac{1}{4}$. Dimostrare che, partendo da $z_0 \in \mathbb{R}$, la successione $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ è crescente e tende a $+\infty$. Dimostrare che l'insieme di Julia è sconnesso e quindi che un tale c non appartiene all'insieme di Mandelbrot.
 - Sia $c < -2$. Dimostrare che, partendo da z_0 immaginaria, la successione $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ è decrescente e tende a $-\infty$. Dimostrare che l'insieme di Julia è sconnesso e quindi che un tale c non appartiene all'insieme di Mandelbrot.

Bibliografia

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ., New York, 1964.
- [2] D.V. Anosov and V.I. Arnol'd, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. **1**, Springer Verlag, 1985.
- [3] V.I. Arnol'd, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. **6**, Springer Verlag, 1985.
- [4] V.I. Arnol'd, *Teoria delle Catastrofi*, Bollati Boringhieri, 1986.
- [5] M. Bramanti, C.D. Pagani, and S. Salsa, *Analisi Matematica 2*, Zanichelli, 2009.
- [6] P. Bourke, *An introduction to fractals*, 1991. Vedi il seguente sito: <http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fractals/fracintro/>
- [7] P.G. Drazin, *Nonlinear Systems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [8] E. Giusti, *Analisi Matematica 2*, Bollati Boringhieri, 1989.
- [9] F.R. Gantmacher, *Matrix Theory*, Vols. I-II, Chelsea Publ., Amer. Math. Soc., 1959.
- [10] J. Gleick, *Chaos. Making a New Science*, Penguin Books, 1987.
- [11] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1998.
- [12] Tien-Yien Li and James A. Yorke, *Period three implies chaos*, American Mathematical Monthly **82**, 985–992 (1975).
- [13] V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*. Princeton Mathematical Series, No. **22**, pg. 523 e seguenti. Princeton University Press, 1960.

- [14] C.D. Pagani and S. Salsa, *Analisi Matematica*, vol. **2**, Masson, 1994.
- [15] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer Verlag, 1991.
- [16] O.M. Šarkovs'kii, *Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself*, Ukrain. Mat. Zh. **16**, 61–71 (1964).
- [17] R. Thom, *Structural Stability and Morphogenesis*, W.A. Benjamin, Reading, Mass., 1975.
- [18] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext, Springer Verlag, 1996.