Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2019/2020
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 10 del 17/12/2019

Problema di Cauchy, metodi alle differenze finite, formule monostep

1) (Prova scritta 12 giugno 2018) Dire se il seguente problema di Cauchy è ben posto

$$\begin{cases} y' = -y^2 + 2, \\ y(0) = 1, \quad x \in [0, 10] \end{cases}$$

ed approssimarne la soluzione in $x = \frac{3}{2}$ mediante il metodo di Eulero con passo $h = \frac{1}{2}$.
SOLUZIONE:
Il problema ammette un'unica soluzione locale, in quanto la $f(x, y)$ è localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile; $\eta_1 = \frac{3}{2}$, $\eta_2 = \frac{11}{8}$, $\eta_3 = \frac{183}{128}$.

2) (Prova scritta 23 febbraio 2018) Considerato il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 - \frac{y_2}{x}, \\ y_1(2) = 0, \quad y_2(2) = 1, \quad x \in [2, 5] \end{cases}$$

si approssimi la soluzione in $x = 3$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$.
SOLUZIONE:
$\boldsymbol{\eta}_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = [-\frac{3}{2}, \frac{7}{20}]^T$.

3) (Seconda prova intermedia 10 gennaio 2018) Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = 3xy - y', \qquad x \in \left[\frac{2}{3}, 5\right] \\ y(\frac{2}{3}) = -1, \quad y'(\frac{2}{3}) = 0, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{3}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{4}{3}$.
SOLUZIONE:
$\boldsymbol{\eta}_1 = [-1, -\frac{2}{3}]^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = [-\frac{11}{9}, -\frac{13}{9}]^T$.

4) (Prova scritta 13 febbraio 2019) Si classifichi il seguente schema alle differenze finite e si studi stabilità, consistenza e convergenza

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{3h}{4}\left[f(x_k, \eta_k) + \frac{1}{3} f\left(x_k + \frac{2}{3}h, \eta_k + \frac{2}{3}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$

Considerato poi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2y - x, \quad x \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

si calcoli la soluzione approssimata nel punto $x = 1$ mediante il metodo alle differenze introdotto in precedenza, nel caso in cui $h = \frac{1}{2}$.
SOLUZIONE:
Lo schema è monostep (perché la valutazione di η_{k+1} richiede la sola conoscenza di η_k, e non le approssimazioni precedenti η_{k-1}, η_{k-2},...), esplicito (perché η_{k+1} compare solo a sinistra dell'uguale, e non compare tra gli argomenti di f), a due stadi (perché ad ogni passo f è valutata due volte). Essendo monostep, è stabile. Risulta essere consistente, e quindi convergente, del primo ordine. Le prime due iterate del metodo sono $\eta_1 = \frac{17}{8}$ e $\eta_2 = \frac{205}{48}$.

5) Classificare il seguente metodo alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\alpha - 3}\left[f(x_k, \eta_k) + 2f(x_k + 2\beta h, \eta_k + 2\beta h f(x_k, \eta_k))\right].$$

Si determinino i valori dei parametri α e β che rendono stabile lo schema. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2.
SOLUZIONE:
Lo schema è monostep (perché la valutazione di η_{k+1} richiede la sola conoscenza di η_k, e non le approssimazioni precedenti η_{k-1}, η_{k-2},...), esplicito (perché η_{k+1} compare solo a sinistra dell'uguale, e non compare tra gli argomenti di f), a due stadi (perché ad ogni passo f è valutata due volte). Essendo monostep, è stabile per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Ha ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = 6$ e $\beta = \frac{3}{8}$.