Tutorato delle lezioni di
MATEMATICA APPLICATA
A.A. 2019/2020
docente: Dott.ssa Luisa Fermo
tutor: Dott.ssa Patricia Díaz de Alba

Esercitazione del 10/10/2019
Algebra lineare

Esercizio 1 Dati

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & -1 \\ i & 1-i & 1 \\ 1 & 2i & 1+2i \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

calcolare le seguenti operazioni: x+y, 3x, $< x, y >$, $x^T y$, Ax, $\|Ax\|_1$, $\|Ax\|_2$, $\|Ax\|_\infty$, $\|y\|_1$, $\|y\|_2$, e $\|y\|_\infty$.

Soluzione:

$$x + y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1-i \end{bmatrix}, \quad 3x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3i \end{bmatrix}, \quad < x, y >= 1 + i,$$

$$x^T y = 1 + i, \quad Ax = \begin{bmatrix} 1+2i \\ 0 \\ 3-i \end{bmatrix}.$$

$\|Ax\|_1 = \sqrt{5} + \sqrt{10}$, $\|Ax\|_2 = \sqrt{15}$, $\|Ax\|_\infty = \sqrt{10}$.

$\|y\|_1 = 3$, $\|y\|_2 = \sqrt{3}$, $\|y\|_\infty = 1$.

Esercizio 2 A partire dai seguenti vettori

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

si crei mediante il procedimento di Gram-Schmidt una base di vettori ortonormali $B = [q1 \quad q2 \quad q3 \quad q4]$. Si consideri poi la matrice $A = [q1 \quad q2 \quad q3 \quad q4]$, si dica se questa è ortogonale e si indichi la sua inversa.

Soluzione:

$q_1 = [1/2, -1/2, 1/2, 1/2]^T$, $q_2 = [1/2, 1/2, 1/2, -1/2]^T$, $q_3 = [\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2, 0]^T$, $q_4 = [0, \sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2]^T$.

La matrice A è ortogonale e la sua inversa è la sua trasposta ($A^{-1} = A^T$).

Esercizio 3 Assegnate le matrici

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix},$$

verificare che Q è ortogonale, calcolare le matrici $A = QL$, $B = LL^T$ e determinare i valori di α e β che rendono M l'inversa di L. Calcolare quindi, nel modo più efficiente, i determinanti e le inverse di A e di B. Si calcoli, inoltre, lo spettro e il raggio spettrale della matrice $C = I - 2vv^T$ dove $v = [0 \quad 1/\sqrt{3} \quad 2/\sqrt{3}]^T$, e si determini, nel modo più conveniente e motivando la risposta, quali sono gli autovalori di C^{-1} e di C^2.

Soluzione:

Q è ortogonale.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{137}{25} & \frac{72}{25} & -\frac{24}{25} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{66}{25} & \frac{21}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 5 & -15 \\ 6 & -15 & 46 \end{bmatrix}.$$

M è l'inversa di L per $\alpha = 2$ e $\beta = 3$.

$\det(A) = -1$, $\det(B) = 1$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ \frac{14}{25} & 1 & \frac{-48}{25} \\ -\frac{24}{25} & 3 & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\sigma(C) = \{1, 1, -7/3\}, \quad \rho(C) = 7/3.$

$\sigma(C^{-1}) = \{1, 1, -3/7\}, \quad \sigma(C^2) = \{1, 1, 49/9\}$