Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2019/2020
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 4 del 22/10/2019

Serie di Fourier, trasformate di Fourier

1) (Recupero prima prova intermedia 25 gennaio 2018 - compito 1) Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-2, 2]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'(x) + y(x) = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & -2 \le x < 0 \\ 2 + x & 0 \le x < 2 \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE</u>: I coefficienti della serie di Fourier del termine noto $f(x)$ sono
$\widetilde{a_0} = 2, \quad \widetilde{a_k} = \frac{2}{k^2\pi^2}\left((-1)^k - 1\right), \quad \widetilde{b_k} = \frac{1}{k\pi}\left(1 - 3(-1)^k\right).$
La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2((-1)^k - 1)}{k^2\pi^2} + \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2 + 4} \right) \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{8(-1)^k}{k\pi(k^2\pi^2 + 4)} \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)$$

2) Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-4, 4]$

$$y'(x) + y(x) = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & -4 \le x < -\pi \\ \cos x & -\pi \le x < \pi \\ -1 & \pi \le x < 4 \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE</u>: I coefficienti della serie di Fourier del termine noto $f(x)$ sono
$\widetilde{a_0} = \frac{\pi-4}{4}, \quad \widetilde{a_k} = \left(\frac{2k\pi}{16-k^2\pi^2} + \frac{2}{k\pi}\right)\sin\left(k\frac{\pi^2}{4}\right), \quad \widetilde{b_k} = 0$ ($f(x)$ è pari).
La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \frac{\pi - 4}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{128}{(16 + k^2\pi^2)(16 - k^2\pi^2)} \sin(k\frac{\pi^2}{4}) \right] \left[\frac{4}{k\pi} \cos(k\frac{\pi}{4}x) + \sin(k\frac{\pi}{4}x) \right]$$

3) (Prima prova intermedia 12 novembre 2018 - compito 1) Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-4, 4]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y''(x) + 5y(x) = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & -4 \le x < -\pi \\ \cos x & -\pi \le x < \pi \\ -1 & \pi \le x < 4 \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE</u>: I coefficienti della serie di Fourier del termine noto $f(x)$ sono
$\widetilde{a_0} = \frac{\pi-4}{4}, \quad \widetilde{a_k} = \left(\frac{2k\pi}{16-k^2\pi^2} + \frac{2}{k\pi}\right)\sin\left(k\frac{\pi^2}{4}\right), \quad \widetilde{b_k} = 0$ ($f(x)$ è pari).
La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \frac{\pi - 4}{20} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{80 - k^2\pi^2} \left(\frac{2k\pi}{16 - k^2\pi^2} + \frac{2}{k\pi} \right) \sin\left(k\frac{\pi^2}{4}\right) \cos\left(k\frac{\pi}{4}x\right)$$

4) Eseguire i seguenti calcoli

- $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{9+k^2}\right\}$
- $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{1}{k^2+4k+5}\right\}$
- $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{\sin(\pi(k-5))}{k-5}\right\}$
- $\mathcal{F}\{e^{-2|x-4|-3ix}\}$
- $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{\sin(3k)}{ke^{2ik}}\right\}$
- $\mathcal{F}\{e^{7x}H(2-x)\}$

<u>SOLUZIONE</u>:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{9+k^2}\right\} = \frac{1}{6}e^{-3|x|}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{k^2+4k+5}\right\} = \frac{1}{2}e^{-(2ix+|x|)}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin(\pi(k-5))}{k-5}\right\} = \frac{e^{5ix}}{2}\left[H(x+\pi)-H(x-\pi)\right]$$

$$\mathcal{F}\{e^{-2|x-4|-3ix}\} = \frac{4e^{-4i(k+3)}}{4+(k+3)^2}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin(3k)}{ke^{2ik}}\right\} = \frac{1}{2}\left[H(x+1)-H(x-5)\right]$$

$$\mathcal{F}\{e^{7x}H(2-x)\} = \frac{e^{2(7-ik)}}{7-ik}$$