Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2019/2020

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 6 del 12/11/2019

Serie di Fourier in forma complessa, trasformate di Fourier

1) Utilizzando la forma complessa della serie di Fourier, sviluppare la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & -\pi \le x < 1 \\ 3 & 1 \le x < \pi \end{cases}$$

SOLUZIONE:

$$S_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}, \qquad \omega = \frac{\pi}{L} = 1,$$

$$c_0 = -\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2},$$

$$c_k = (-1)^k \left[-\frac{\pi+1}{\pi i k} - \frac{1}{\pi k^2} - \frac{3}{2\pi i k} \right] + e^{-ik} \left[\frac{1}{\pi k^2} + \frac{3}{2\pi i k} \right].$$

2) Eseguire i seguenti calcoli

- $\mathcal{F}\left\{\delta(3x-1)\cos(5x)\right\}$
- $\mathcal{F}\left\{\dfrac{5x}{x^2+9}\right\}$
- $e^{-3|x|} * [H(x+3) - H(x-2)]$

dove $H(x)$ denota la funzione di Heaviside e il simbolo $*$ indica la convoluzione.
SOLUZIONE:

$$\mathcal{F}\left\{\delta(3x-1)\cos(5x)\right\} = \frac{1}{6}\left[e^{-\frac{i}{3}(k-5)} + e^{-\frac{i}{3}(k+5)}\right]$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{5x}{x^2+9}\right\} = \frac{5\pi}{i}\left[e^{-3k}H(k) - e^{3k}H(-k)\right] = \begin{cases} -5\pi i e^{-3k} & k \ge 0 \\ 5\pi i e^{3k} & k < 0 \end{cases}$$

$$e^{-3|x|} * [H(x+3) - H(x-2)] = \begin{cases} -\frac{1}{3}e^{3x}\left[e^{-6} - e^{9}\right] & x < -3 \\ \frac{1}{3}\left[2 - e^{-3(x+3)} - e^{3(x-2)}\right] & -3 \le x \le 2 \\ \frac{1}{3}e^{-3x}\left[e^{6} - e^{-9}\right] & x > 2 \end{cases}$$

3) Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 7y' + 12y = \delta(x-5), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

SOLUZIONE:

$$y(x) = e^{4(x-5)}\left[e^{-(x-5)} - 1\right] H(5-x) = \begin{cases} 0 & x > 5 \\ e^{4(x-5)}\left[e^{-(x-5)} - 1\right] & x \le 5 \end{cases}$$

4) Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-y' + 2y = H(x+1) - H(x-3), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

SOLUZIONE:

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{2x}\left[e^{-6} - e^{2}\right] & x < -1 \\ -\frac{1}{2}\left[e^{2(x-3)} - 1\right] & -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$

5) Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-y'' - 3y' + 4y = \delta(x-2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

SOLUZIONE:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-4(x-2)} & x \geq 2 \\ \frac{1}{5}e^{x-2} & x < 2 \end{cases}$$