Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2019/2020

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 7 del 19/11/2019

Algebra lineare

1) Assegnate le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare le loro norme norme 1, 2 e ∞.

SOLUZIONE:

$\|A\|_1 = 9$, $\|A\|_\infty = 7$, $\|A\|_2 = \sqrt{17 + 2\sqrt{61}}$.

$\|B\|_1 = \|B\|_\infty = 5$, $\|B\|_2 = 2 + \sqrt{5}$

2) Assegnate le matrici

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ a & \frac{1}{2} & 0 \\ b & c & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

calcolare il determinante della matrice $A = LL^T$. Determinare inoltre i parametri a, b e c che rendono la matrice M l'inversa di L e dedurre l'inversa della matrice A. Calcolare le norme 1 e ∞ di A.

SOLUZIONE:

$\det(A) = 64$. $\qquad M = L^{-1}$ se $a = -\frac{5}{4}$, $b = \frac{3}{8}$, $c = -\frac{1}{4}$. $\qquad \|A\|_1 = \|A\|_\infty = 46$.

$$A^{-1} = M^T M = \begin{bmatrix} \frac{125}{64} & -\frac{23}{32} & \frac{3}{16} \\ -\frac{23}{32} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

3) (Prima prova intermedia, compito 1 - 5 novembre 2019) Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 3\alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2\beta & -1 & \beta \\ -1 & 1 & -1 \\ \beta & -1 & 2\beta \end{bmatrix},$$

dove α e β sono parametri reali. Determinare i valori di α che rendono invertibile la matrice A e, fissato $\alpha = 1$, i valori di β che rendono B l'inversa di A. Per gli stessi valori dei parametri, determinare lo spettro di A e il raggio spettrale di A, B e A^3. Si calcoli infine la norma ∞ del vettore $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, dove $\mathbf{x} = (2, i, 1+i)^T$.

SOLUZIONE:

La matrice A è non singolare per $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{6}/3$; B è l'inversa di A per $\beta = 1$; $\sigma(A) = \{1, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$, $\rho(A) = 2+\sqrt{3}$, $\rho(B) = \rho(A^{-1}) = 1/(2-\sqrt{3})$, $\rho(A^3) = \rho(A)^3 = (2+\sqrt{3})^3$; $\mathbf{y} = (2+i, 3+4i, 1+2i)^T$, $\|\mathbf{y}\|_\infty = 5$.