Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2019/2020

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 8 del 03/12/2019

Condizionamento, metodo di Gauss, trasformata di Fourier

1) (Seconda prova intermedia, compito 1 - 10 gennaio 2018) Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Si determinino i valori dei parametri α e β che rendono le matrici A e B una l'inversa dell'altra, i valori di γ che rendono C una matrice ortogonale. Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle tre matrici in norma 1, 2 e ∞ e si precisi il raggio spettrale di A. Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = BC$ e $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$.

SOLUZIONE:

Le matrici A e B sono una l'inversa dell'altra se $\alpha = 1$ e $\beta = -5/2$; C è ortogonale se $\gamma = \pm\sqrt{2}/2$; $\kappa_1(A) = \kappa_\infty(A) = \kappa_1(B) = \kappa_\infty(B) = 9/5$, $\kappa_2(A) = \kappa_2(B) = \sqrt{5}/2$, $\kappa_1(C) = \kappa_\infty(C) = 2$, $\kappa_2(C) = 1$; $\rho(A) = \sqrt{5}$; $\mathbf{x} = (BC)^{-1}\mathbf{b} = C^T A\mathbf{b} = (-\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2})^T$.

2) (Seconda prova intermedia, compito 1 - 14 gennaio 2016) Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 3\beta & -\beta \\ 0 & -\beta & 2\beta \end{bmatrix}$$

dove α e β sono parametri reali. Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali la matrice A è definita positiva. Si calcoli per quali valori di β B è la matrice inversa di A. Fissato, quindi, un tale valore si determini al variare di α il condizionamento di A con indice 1, 2, ∞.

SOLUZIONE:

A è invertibile per $\alpha \neq 0$ ed è definita positiva per $\alpha > 0$.

B è l'inversa di A per $\beta = 1/5$.

$$\kappa_1(A) = \begin{cases} \dfrac{4}{|\alpha|}, & -\dfrac{5}{4} \leq \alpha \leq \dfrac{5}{4} \\[2ex] \dfrac{16}{5}, & -4 \leq \alpha < -\dfrac{5}{4}, \quad \dfrac{5}{4} < \alpha \leq 4 \\[2ex] \dfrac{4|\alpha|}{5}, & \alpha < -4, \quad \alpha > 4 \end{cases}$$

$\kappa_1(A) = \kappa_\infty(A)$.

$$\kappa_2(A) = \begin{cases} \dfrac{5+\sqrt{5}}{2|\alpha|}, & -\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \\[2ex] \dfrac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}, & -\dfrac{5+\sqrt{5}}{2} < \alpha < -\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}, \quad \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} < \alpha < \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \\[2ex] \dfrac{2|\alpha|}{5-\sqrt{5}}, & \alpha \leq -\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}, \quad \alpha \geq \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

3) Risolvere il seguente sistema lineare con l'algoritmo di Gauss

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 15 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE</u>:
Il sistema è singolare, quindi ha infinite soluzioni, date da $\mathbf{x} = [-\frac{5}{3}\lambda, 5 + \frac{8}{3}\lambda, \lambda]^T$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4) Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 8, \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.
<u>SOLUZIONE</u>:

$$U = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/12 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 5/6 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 5/12 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\det(A) = (-1)^{\sharp scambi} \prod_{i=1}^{4} u_{ii} = 10$.
La soluzione del sistema è $\mathbf{x} = [1, -2, 1, 4]^T$.

5) (Recupero prima prova intermedia - 25 gennaio 2018) Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y' - 4y = e^{-3x} H(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

<u>SOLUZIONE</u>:

$$y(x) = -\frac{1}{7}\left[e^{-3x}H(x) + e^{4x}H(-x)\right] = \begin{cases} -\dfrac{1}{7}e^{-3x} & x > 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{7}e^{4x} & x \leq 0 \end{cases}$$