Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2019/2020

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 9 del 10/12/2019

Fattorizzazione $PA = LU$, metodi iterativi per risolvere sistemi lineari

1) (Prova scritta 27 ottobre 2017) Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ed utilizzarla per calcolare il determinante di A e risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [0, -12, -6, -12]^T$.

<u>SOLUZIONE</u>:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/8 & 1 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3/2 & -3/4 & 9/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\det(A) = -12, \quad \mathbf{x} = [1, 0, -7, -6]^T.$

2) (Prova scritta 30 giugno 2017) Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ed utilizzarla per calcolare il determinante di A e calcolare la seconda colonna di A^{-1}.

<u>SOLUZIONE</u>:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/5 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -12/5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\det(A) = 12, \quad A^{-1}\mathbf{e}_2 = [-1/6, -5/6, 2/3, 1/2]^T.$

3) (Prova scritta 13 luglio 2018) Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 0]^T$. È possibile dire qual è la soluzione del sistema senza fare ulteriori calcoli?

SOLUZIONE:

A è non singolare se $\alpha \neq 0, 2$. Il metodo di Jacobi converge se $-2 < \alpha < 2$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1, 1/2, 0]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1, 1/2, 0]^T$. Poiché il metodo è consistente, la soluzione è $\mathbf{x} = [1, 1/2, 0]^T$.

4) (Recupero seconda prova intermedia 31 gennaio 2017) Assegnato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro a il sistema ammette una sola soluzione e per quali valori il metodo iterativo di Gauss-Seidel risulta convergente. Fissato $a = 2$, calcolare le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

SOLUZIONE:

Il sistema ammette un'unica soluzione se $a \neq \pm\sqrt{7}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $-\sqrt{7} < a < \sqrt{7}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1, 1/4, -1/2]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [-1/4, 7/8, -1/8]^T$.