# Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2019/2020
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

**Esercitazione** extra del 31/10/2019
*Riepilogo*

**1**) Si considerino le matrici $A = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T$ e $B = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_3^T$, dove

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica se le matrici $A$ e $B$ sono singolari e si determinino spettro e raggio spettrale di $A$. Si considerino poi le seguenti matrici

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3\alpha & -\alpha \end{bmatrix}$$

dove $\alpha$ è un parametro reale. Si dica qual è il valore di $\alpha$ che rende $D$ l'inversa di $C$ e si calcoli in modo efficiente l'inversa di $E = C^T C$.
<u>SOLUZIONE</u>: Le matrici $A$ e $B$ sono singolari.

$$\sigma(A) = \{0, 3-\sqrt{5}, 3+\sqrt{5}\}, \qquad \rho(A) = 3+\sqrt{5},$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad E^{-1} = DD^T = \begin{bmatrix} 5 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

**2**) Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine e dire se $f(x)$ è integrabile termine a termine

$$y' + \frac{5}{9}y = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < -\frac{9}{5} \\ \cos(x) & -\frac{9}{5} \le x < \frac{9}{5} \\ -1 & \frac{9}{5} < x \le \pi \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE</u>: $f(x)$ non è continua in $[-\pi, \pi]$, quindi non è differenziabile termine a termine.
$f(x)$ è regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$ (perché ha un numero finito di salti), quindi è integrabile termine a termine.
I coefficienti della serie di Fourier del termine noto $f(x)$ sono
$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\left[\sin(\dfrac{9}{5}) - \pi + \dfrac{9}{5}\right], \qquad a_1 = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{9}{5} + \dfrac{1}{2}\sin(\dfrac{18}{5}) + 2\sin(\dfrac{9}{5})\right],$
$a_k = \dfrac{2}{\pi(1-k^2)}\left[\sin(\dfrac{9}{5})\cos(\dfrac{9}{5}k) - k\sin(\dfrac{9}{5}k)\cos(\dfrac{9}{5})\right] + \dfrac{2}{k\pi}\sin(\dfrac{9}{5}k),$
$b_k = 0$ ($f(x)$ è pari).
La serie di Fourier del termine noto $f(x)$ è

$$S_f(x) = a_0 + a_1\cos(x) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

La soluzione dell'equazione differenziale è

$$S_y(x) = \frac{9}{5}a_0 + \frac{45}{106}a_1\cos(x) + \frac{81}{106}a_1\sin(x) + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{45}{25+81k^2}a_k\cos(kx) + \frac{81k}{25+81k^2}a_k\sin(kx)\right].$$

**3**) Eseguire i seguenti calcoli:

- $\mathcal{F}\left\{3(x-2)e^{-2|x-2|}\right\}$
- $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{ik}{k^2+2k+6}\right\}$
- $\mathcal{F}\left\{\frac{e^{2ix}\cos(3x)}{1+3ix}\right\}$

<u>SOLUZIONE</u>:

$$\mathcal{F}\left\{3(x-2)e^{-2|x-2|}\right\} = -\frac{24ik}{(4+k^2)^2}e^{-2ik}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{ik}{k^2+2k+6}\right\} = -\frac{i\sqrt{5}}{10}e^{-\sqrt{5}|x|-ix} - \frac{1}{2}e^{-(\sqrt{5}+i)x}H(x) + \frac{1}{2}e^{(\sqrt{5}-i)x}H(-x)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{e^{2ix}\cos(3x)}{1+3ix}\right\} = \frac{\pi}{3}\left[e^{\frac{k-5}{3}}H(5-k) + e^{\frac{k+1}{3}}H(-k-1)\right]$$