

Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2020/2021

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 10 del 21/12/2020

Metodi alle differenze finite, formule monostep e multistep

1) (Prova scritta - 23 febbraio 2018)

Considerato il seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 - \frac{y_2}{x}, \\ y_1(2) = 0, \quad y_2(2) = 1, \quad x \in [2, 5] \end{cases}$$

si approssimi la soluzione in $x = 3$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$.

SOLUZIONE:

$$\boldsymbol{\eta}_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]^T, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = [-\frac{3}{2}, \frac{7}{20}]^T.$$

2) (Seconda prova intermedia - 10 gennaio 2018)

Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = 3xy - y', & x \in [\frac{2}{3}, 5] \\ y(\frac{2}{3}) = -1, \quad y'(\frac{2}{3}) = 0, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{3}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{4}{3}$.

SOLUZIONE:

$$\boldsymbol{\eta}_1 = [-1, -\frac{2}{3}]^T, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = [-\frac{11}{9}, -\frac{13}{9}]^T.$$

3) (Prova scritta 13 febbraio 2019)

Si classifichi il seguente schema alle differenze finite e si studi stabilità, consistenza e convergenza

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{3h}{4} \left[f(x_k, \eta_k) + \frac{1}{3} f\left(x_k + \frac{2}{3}h, \eta_k + \frac{2}{3}hf(x_k, \eta_k)\right) \right].$$

Considerato poi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2y - x, & x \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

si calcoli la soluzione approssimata nel punto $x = 1$ mediante il metodo alle differenze introdotto in precedenza, nel caso in cui $h = \frac{1}{2}$.

SOLUZIONE:

Lo schema è monostep (perché la valutazione di η_{k+1} richiede la sola conoscenza di η_k , e non le approssimazioni precedenti $\eta_{k-1}, \eta_{k-2}, \dots$), esplicito (perché η_{k+1} compare solo a

sinistra dell'uguale, e non compare tra gli argomenti di f), a due stadi (perché ad ogni passo f è valutata due volte). Essendo monostep, è stabile. Risulta essere consistente, e quindi convergente, del primo ordine. Le prime due iterate del metodo sono $\eta_1 = \frac{17}{8}$ e $\eta_2 = \frac{205}{48}$.

- 4) Dimostrare che il metodo di Adams-Bashfort è consistente, di ordine 2 e stabile

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{2} [3f(x_i, \eta_i) - f(x_{i-1}, \eta_{i-1})].$$

SOLUZIONE:

Capitolo 5 del libro, esempi 5.13 e 5.15.

- 5) (Seconda prova intermedia 10 gennaio 2018)

Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

(a) $\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\alpha - 3} [f(x_k, \eta_k) + 2f(x_k + 2\beta h, \eta_k + 2\beta h f(x_k, \eta_k))]$

(b) $\eta_{k+1} = (\gamma + 1)\eta_k - \gamma\eta_{k-1} + 2h(\gamma + 1)f(x_k, \eta_k)$

Si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2 nel metodo monostep.

In più: determinare il valore del parametro che rende consistente il metodo multistep.

SOLUZIONE:

Lo schema (a) è monostep (perché la valutazione di η_{k+1} richiede la sola conoscenza di η_k , e non le approssimazioni precedenti $\eta_{k-1}, \eta_{k-2}, \dots$), esplicito (perché η_{k+1} compare solo a sinistra dell'uguale, e non compare tra gli argomenti di f), a due stadi (perché ad ogni passo f è valutata due volte). Essendo monostep, è stabile per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Ha ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = 6$ e $\beta = \frac{3}{8}$.

Lo schema (b) è multistep (perché la valutazione di η_{k+1} richiede la conoscenza di η_k e di η_{k-1}), esplicito (perché η_{k+1} compare solo a sinistra dell'uguale, e non compare tra gli argomenti di f), ad uno stadio (perché ad ogni passo f è valutata una volta) ed è stabile se $-1 \leq \gamma < 1$. È consistente se $\gamma = -\frac{1}{3}$.