Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2020/2021
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 11 del 07/01/2021

Riepilogo

1) (Seconda prova intermedia 13 gennaio 2017)
Si considerino le seguenti matrici

$$A = I - 4\mathbf{w}\mathbf{w}^T, \qquad B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & \alpha & -2 \\ \alpha & 3 & \alpha \\ -2 & \alpha & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\beta}{2} \\ 0 & -\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{w} = [\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$. Si determinino i valori del parametro α che rendono B l'inversa di A e si calcoli l'indice di condizionamento della matrice A in norma ∞, 1 e 2. Si dica, inoltre, sulla base dei calcoli fatti e motivando la risposta se A è definita positiva. Si calcolino, infine, i valori di β che rendono C una matrice ortogonale e, fissato uno di questi, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $C\mathbf{x} = \mathbf{w}$.
<u>SOLUZIONE</u>:
B è l'inversa di A se $\alpha = 2$, $\kappa_\infty(A) = \kappa_1(A) = 7$, $\kappa_2(A) = 5$. A non è definita positiva.
C è ortogonale se $\beta = \pm\sqrt{3}$.
Se $\beta = \sqrt{3}$, $\mathbf{x} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}]^T$ mentre se $\beta = -\sqrt{3}$, $\mathbf{x} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}]^T$.

2) Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$y''(x) + 3\sqrt{2}y'(x) - 4y(x) = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & -\frac{\pi}{2} \le x < -\frac{1}{2} \\ \sin(\pi x) & -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE</u>:
I coefficienti della serie di Fourier del termine noto $f(x)$ sono
$\widetilde{a_0} = \widetilde{a_k} = 0$ ($f(x)$ è dispari), $\widetilde{b_k} = \left(\frac{8k}{\pi(\pi^2 - 4k^2)} + \frac{1}{k\pi}\right)\cos(k) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}$.
La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8(k^2+1)^2 + 36k^2}\, \widetilde{b_k}\left[-3\sqrt{2}k\cos(2kx) - 2(k^2+1)\sin(2kx)\right]$$

3) (Prova scritta 12 giugno 2018)
Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare il determinante di A e la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [-4, -4, -8, -5]^T$.
<u>SOLUZIONE</u>:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1/4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 13/4 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\det(A) = 78, \quad \mathbf{x} = [-1, -1, -1, -1]^T.$

4) (Prova scritta 12 giugno 2018)
Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 3 & 0 \\ \alpha & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 0]^T$.
<u>SOLUZIONE</u>:
A è non singolare se $\alpha \neq 0, 3/2$. Il metodo di Jacobi converge se $-3/2 < \alpha < 3/2$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [8, -4/3, 8/3]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [20/3, -8/9, 28/9]^T$.

5) (Prova scritta 22 marzo 2018)
Risolvere ricorrendo alla trasformata di Fourier, l'equazione differenziale

$$y' + 2\sqrt{3}y = H(x + \pi) - H(x - \pi), \qquad x \in \mathbb{R},$$

dove H denota la funzione di Heaviside.
<u>SOLUZIONE</u>:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi, \\ \frac{\sqrt{3}}{6}\left[1 - e^{-2\sqrt{3}(x+\pi)}\right], & -\pi \leq x < \pi, \\ \frac{\sqrt{3}}{6}\left[e^{-2\sqrt{3}(x-\pi)} - e^{-2\sqrt{3}(x+\pi)}\right], & x \geq \pi. \end{cases}$$

6) Eseguire i seguenti calcoli

1. $\mathcal{F}\left\{\frac{x}{3}H(x-3)e^{-x}\right\}$ (Prova scritta 6 luglio 2016)

2. $\mathcal{F}\left\{\frac{(x-6)H(x-6)}{\sqrt{3}e^{\sqrt{2}x}}\right\}$ (Prova scritta 21 settembre 2016)

SOLUZIONE:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{x}{3}H(x-3)e^{-x}\right\} = \frac{e^{-3(1+ik)}}{3}\left(\frac{3}{1+ik}+\frac{1}{(1+ik)^2}\right)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{(x-6)H(x-6)}{\sqrt{3}e^{\sqrt{2}x}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{e^{-6(\sqrt{2}+ik)}}{(\sqrt{2}+ik)^2}$$

7) (Recupero seconda prova intermedia 25 gennaio 2018)
Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

(a) $\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{1}{3}\alpha h\left[f(x_k,\eta_k) + 5f(x_k+\beta h, \eta_k + \beta h f(x_k,\eta_k))\right]$,

(b) $\eta_{k+1} = (3\gamma+2)\eta_k - (2\gamma^2+3\gamma+1)\eta_{k-1} + \delta h f(x_{k-1},\eta_{k-1})$.

Si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono un ordine di convergenza pari a 2 nel metodo monostep.
SOLUZIONE:
Lo schema (a) è monostep (perché la valutazione di η_{k+1} richiede la sola conoscenza di η_k, e non le approssimazioni precedenti η_{k-1}, η_{k-2},...), esplicito (perché η_{k+1} compare solo a sinistra dell'uguale, e non compare tra gli argomenti di f), a due stadi (perché ad ogni passo f è valutata due volte). Essendo monostep, è stabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ha ordine di convergenza pari a 2 se $\alpha = 1/2$ e $\beta = 3/5$.
Lo schema (b) è multistep (perché la valutazione di η_{k+1} richiede la conoscenza di η_k e di η_{k-1}), esplicito (perché η_{k+1} compare solo a sinistra dell'uguale, e non compare tra gli argomenti di f), ad uno stadio (perché ad ogni passo f è valutata una volta) ed è stabile se $-1 \le \gamma < 0$.

8) (Prova scritta 27 giugno 2018)
Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = (y'-1)x - y, & x \in \left[\frac{1}{2}, 7\right] \\ y(\frac{1}{2}) = 1, \quad y'(\frac{1}{2}) = 0, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.
SOLUZIONE:
$\boldsymbol{\eta}_1 = [1, -\frac{3}{4}]^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = [\frac{5}{8}, -\frac{17}{8}]^T$.