Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2020/2021

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 12 del 25/01/2021

Riepilogo

1) (Recupero seconda prova intermedia - 29 gennaio 2019)
Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 2\alpha \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3/4 & \beta & 1/4 \\ \beta & 1 & \beta \\ 1/4 & \beta & 3/4 \end{bmatrix}, \qquad Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si determinino i valori di α per cui la matrice A è non singolare e per quali è definita positiva. Fissato $\alpha = 1$, si determinino i valori di β che rendono B inversa di A, e si calcoli il numero di condizionamento di A in norma 1, ∞ e 2. Infine, dopo aver verificato che Q è ortogonale, si risolva nel modo più conveniente il sistema $Q\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{b}$ è il vettore unitario.

2) (Prima prova intermedia - 14 novembre 2017 - compito 1)
Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-2, 2]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'(x) + \sqrt{2}y(x) = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & -2 \leq x < -1, \\ 2 + x & -1 \leq x < 0, \\ 2 - x & 0 \leq x < 1, \\ 1 & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

3) (Seconda prova intermedia - 9 gennaio 2020 - compito 1)
Si determini la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare il determinante di A e l'unica soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [1, 0, 1, 0]^T$.

4) (Prima prova intermedia - 5 novembre 2019 - compito 1)
Eseguire i seguenti calcoli

1. $\mathcal{F}\left\{\dfrac{\cos(7x)}{5 + i(x+1)}\right\}$

2. $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{i(k+3)e^{5ik}}{k^2 + 6k + 12}\right\}$

5) (Seconda prova intermedia - 9 gennaio 2020 - compito 1)
Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 2y = H(x-1) - H(x-5), \quad x \in \mathbb{R}.$$

6) (Prova scritta - 13 luglio 2018)
Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 0]^T$. È possibile dire qual è la soluzione del sistema senza fare ulteriori calcoli?

7) (Seconda prova intermedia - 9 gennaio 2020 - compito 1)
Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = x/y - y', & x \in [1, 4] \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{5}{2}$.

8) (Seconda prova intermedia - 9 gennaio 2020 - compito 1)
Dopo aver classificato i seguenti metodi alle differenze finite

(a) $\eta_{k+1} = \eta_k + \dfrac{\alpha}{\beta} h \left[3f(x_k, \eta_k) + 4f(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k))\right]$,

(b) $\eta_{k+1} = -\delta \eta_k + (1 - \delta)\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k)$.

si determinino i valori dei parametri $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ che rendono stabili entrambi gli schemi. Si dica inoltre quali valori dei parametri coinvolti garantiscono per il metodo monostep il massimo ordine di convergenza.