Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2020/2021
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 2 del 26/10/2020
Algebra lineare e Serie di Fourier

1) (Recupero prima prova intermedia - 29 gennaio 2019 - Compito 1 - Esercizio 2)
Si considerino le matrici $A = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^T$ e $B = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^T + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_3^T$, dove $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ sono i vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Si dica se le matrici A e B sono singolari e si determinino spettro e raggio spettrale di A.
Si considerino poi le seguenti matrici

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3\alpha & -\alpha \end{bmatrix}.$$

dove α è un parametro reale. Si dica quale è il valore di α che rende D l'inversa di C e si calcoli in modo efficiente l'inversa di $E = C^TC$.
<u>SOLUZIONE</u>:
Le matrici A e B sono singolari.

$$\sigma(A) = \{0, 3-\sqrt{5}, 3+\sqrt{5}\}, \qquad \rho(A) = 3+\sqrt{5},$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad E^{-1} = DD^T = \begin{bmatrix} 5 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

2) (Prima prova intermedia - 5 novembre 2019 - Compito 1 - Esercizio 2)
Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 3\alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2\beta & -1 & \beta \\ -1 & 1 & -1 \\ \beta & -1 & 2\beta \end{bmatrix},$$

dove α e β sono parametri reali. Determinare i valori di α che rendono invertibile la matrice A e, fissato $\alpha = 1$, i valori di β che rendono B l'inversa di A. Per gli stessi valori dei parametri, determinare lo spettro di A e il raggio spettrale di A, B e A^3. Si calcoli infine la norma ∞ del vettore $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, dove $\mathbf{x} = (2, i, 1+i)^T$.
<u>SOLUZIONE</u>:
La matrice A è non singolare per $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{6}/3$.
B è l'inversa di A per $\beta = 1$.
$\sigma(A) = \{1, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$, $\quad \rho(A) = 2+\sqrt{3}$,
$\rho(B) = \rho(A^{-1}) = 1/(2-\sqrt{3})$, $\quad \rho(A^3) = \rho(A)^3 = (2+\sqrt{3})^3$.
$\mathbf{y} = (2+i, 3+4i, 1+2i)^T$, $\quad \|\mathbf{y}\|_\infty = 5$.

3) (Opzionale) Dimostrare che le funzioni trigonometriche

$$1, \cos(\omega x), \sin(\omega x), \ldots, \cos(n\omega x), \sin(n\omega x)$$

sono mutuamente ortogonali in $[0, T]$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$.
<u>SOLUZIONE</u>:
Teorema 6.1 del libro.

4) Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = x + 1, \qquad -\pi \leq x < \pi$$

<u>SOLUZIONE</u>:
$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1},$

$$S_f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \sin(kx)$$

5) Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & -1 \leq x < 0 \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE</u>:
$a_0 = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}, \quad a_k = \frac{1}{k^2\pi^2}[1 + (-1)^{k+1}] + \frac{1}{\pi+2k\pi} + \frac{1}{\pi-2k\pi}, \quad b_k = (-1)^{k+1}[\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{2k\pi-\pi} + \frac{1}{2k\pi+\pi}],$

$$S_f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{k^2\pi^2}\left(1 + (-1)^{k+1}\right) + \frac{1}{\pi + 2k\pi} + \frac{1}{\pi - 2k\pi}\right]\cos(k\pi x) + \right.$$
$$\left. + \left[(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{2k\pi - \pi} + \frac{1}{2k\pi + \pi}\right)\right]\sin(k\pi x)\right\}$$

6) Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE</u>:
$a_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi},$
$a_k = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1+(-1)^k}{1+k} + \frac{1+(-1)^k}{1-k}\right] + \frac{(-1)^k-1}{k^2\pi}, \quad$ per $k \neq 1,$
$b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad$ per $k \neq 1,$
$a_1 = -\frac{2}{\pi}, \quad b_1 = \frac{3}{2},$

$$S_f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\cos(x) + \frac{3}{2}\sin(x) +$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1 + (-1)^k}{1 + k} + \frac{1 + (-1)^k}{1 - k}\right) + \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi}\right]\cos(kx) + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)\right\}$$