Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2020/2021
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 3 del 02/11/2020

Serie di Fourier, funzioni pari e dispari, Serie di Fourier in forma complessa

1) (Prima prova intermedia - 5 novembre 2019 - Compito 1 - Esercizio 3)
Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \\ \cos(\pi x) + 1 & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine e se è integrabile termine a termine.
<u>SOLUZIONE</u>:
La funzione è differenziabile termine a termine perché ....
La funzione è integrabile termine a termine perché ....
$a_0 = \frac{2}{\pi^2} + 1, \quad a_k = \frac{4\cos(k)}{\pi^2 - 4k^2}, \quad b_k = 0$ (f è pari)

$$S_f(x) = \frac{2}{\pi^2} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos(k)}{\pi^2 - 4k^2} \cos(2kx)$$

2) (Prima prova intermedia - 5 novembre 2019 - Compito 2 - Esercizio 3)
Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & -\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \\ \sin(\pi x) & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine e se è integrabile termine a termine.
<u>SOLUZIONE</u>:
La funzione non è differenziabile termine a termine perché ....
La funzione è integrabile termine a termine perché ....
$a_0 = 0, \quad a_k = 0$ (f è dispari), $\quad b_k = \left(\frac{8k}{\pi(\pi^2 - 4k^2)} + \frac{1}{k\pi}\right)\cos(k) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}$

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{8k}{\pi(\pi^2 - 4k^2)} + \frac{1}{k\pi}\right)\cos(k) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\right] \sin(2kx)$$

3) Utilizzando la forma complessa della serie di Fourier, sviluppare la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & -\pi \leq x < 1 \\ 3 & 1 \leq x < \pi \end{cases}$$

SOLUZIONE:

$$S_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}, \qquad \omega = \frac{\pi}{L} = 1,$$

$$c_0 = -\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2},$$

$$c_k = (-1)^k \left[-\frac{\pi+1}{\pi i k} - \frac{1}{\pi k^2} - \frac{3}{2\pi i k} \right] + e^{-ik} \left[\frac{1}{\pi k^2} + \frac{3}{2\pi i k} \right].$$