

Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2020/2021

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 6 del 23/11/2020

Trasformata di Fourier, risoluzione di ODE tramite trasformata di Fourier,
Algebra lineare

1) Eseguire i seguenti calcoli

1. $\mathcal{F} \left\{ \frac{e^{2ix} \cos(3x)}{1 + 3ix} \right\}$ (Prima prova intermedia 12 novembre 2018)
2. $\mathcal{F} \left\{ 3(x - 2)e^{-2|x-2|} \right\}$
3. $\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{ik}{k^2 + 2k + 6} \right\}$ (Prima prova intermedia 12 novembre 2018)
4. $\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{3 + i(k - 2)}{9 + (k - 2)^2} e^{-3ik} \right\}$ (Prima prova intermedia 14 novembre 2017)
5. $\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{-2ik}}{5 + i(6 - 2k)} \right\}$

SOLUZIONE:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{e^{2ix} \cos(3x)}{1 + 3ix} \right\} = \frac{\pi}{3} \left[e^{\frac{k-5}{3}} H(5 - k) + e^{\frac{k+1}{3}} H(-k - 1) \right]$$

$$\mathcal{F} \left\{ 3(x - 2)e^{-2|x-2|} \right\} = -\frac{24ik}{(4 + k^2)^2} e^{-2ik}$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{ik}{k^2 + 2k + 6} \right\} = -\frac{i\sqrt{5}}{10} e^{-\sqrt{5}|x|-ix} - \frac{1}{2} e^{-(\sqrt{5}+i)x} H(x) + \frac{1}{2} e^{(\sqrt{5}-i)x} H(-x)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{3 + i(k - 2)}{9 + (k - 2)^2} e^{-3ik} \right\} = e^{(3+2i)(x-3)} H(3 - x)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{-2ik}}{5 + i(6 - 2k)} \right\} = \frac{1}{2} e^{(\frac{5}{2}+3i)(x-2)} H(2 - x)$$

2) Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, le seguenti equazioni differenziali

1. $y'' - 7y' + 12y = \delta(x - 5), \quad x \in \mathbb{R}.$

SOLUZIONE:

$$y(x) = e^{3(x-5)} \left[1 - e^{x-5} \right] H(5 - x) = \begin{cases} 0 & x > 5 \\ e^{3(x-5)} [1 - e^{x-5}] & x \leq 5 \end{cases}$$

2. $y' + 5y = H(x+10) - H(x-6)$, $x \in \mathbb{R}$. (Prima prova intermedia 12 nov 2018)
SOLUZIONE:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < -10 \\ \frac{1}{5} \left(1 - e^{-5(x+10)}\right) & -10 \leq x < 6 \\ \frac{1}{5} e^{-5x} (e^{30} - e^{-50}) & x \geq 6 \end{cases}$$

3. $y'' - 2y = H(x-1) - H(x-5)$, $x \in \mathbb{R}$. (Seconda prova intermedia 9 gen 2020)
SOLUZIONE:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(e^{\sqrt{2}(x-5)} - e^{\sqrt{2}(x-1)}\right) & x < 1 \\ \frac{1}{4} \left(e^{\sqrt{2}(x-5)} + e^{-\sqrt{2}(x-1)} - 2\right) & 1 \leq x < 5 \\ \frac{1}{4} \left(e^{-\sqrt{2}(x-1)} - e^{-\sqrt{2}(x-5)}\right) & x \geq 5 \end{cases}$$

3) Assegnate le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare le loro norme 1, 2 e ∞ .

SOLUZIONE:

$$\|A\|_1 = 9, \|A\|_\infty = 7, \|A\|_2 = \sqrt{17 + 2\sqrt{61}}$$

$$B \text{ è simmetrica, } \|B\|_1 = \|B\|_\infty = 5, \|B\|_2 = 2 + \sqrt{5}$$