

Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2020/2021

Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez

Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 7 del 30/11/2020

Condizionamento, algoritmo di Gauss, trasformata di Fourier

1) (Seconda prova intermedia, compito 1 - 10 gennaio 2018)

Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & -2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Si determinino i valori dei parametri α e β che rendono le matrici A e B una l'inversa dell'altra, i valori di γ che rendono C una matrice ortogonale. Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli l'indice di condizionamento delle tre matrici in norma 1, 2 e ∞ e si precisi il raggio spettrale di A . Infine, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $M = BC$ e $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$.

SOLUZIONE:

Le matrici A e B sono una l'inversa dell'altra se $\alpha = 1$ e $\beta = -5/2$; C è ortogonale se $\gamma = \pm\sqrt{2}/2$; $\kappa_1(A) = \kappa_\infty(A) = \kappa_1(B) = \kappa_\infty(B) = 9/5$, $\kappa_2(A) = \kappa_2(B) = \sqrt{5}/2$, $\kappa_1(C) = \kappa_\infty(C) = 2$, $\kappa_2(C) = 1$; $\rho(A) = \sqrt{5}$; $\mathbf{x} = (BC)^{-1}\mathbf{b} = C^T A \mathbf{b} = (-\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2})^T$.

2) (Recupero seconda prova intermedia - 25 gennaio 2018)

Si considerino le matrici

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \beta \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Si determinino i valori di α e β che rendono M e U una l'inversa dell'altra e che rendono simmetrica la matrice $A = LM$. Assegnato a ciascun parametro uno dei valori trovati, si calcoli nel modo più conveniente l'inversa di A , il suo raggio spettrale e il suo indice di condizionamento in norma 1, 2 e ∞ .

SOLUZIONE:

Le matrici M e U sono una l'inversa dell'altra se $\beta = -\frac{1}{8}$; A è simmetrica se $\alpha = 1$;

$$A^{-1} = M^{-1}L^{-1} = UU^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{64} & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

$$\rho(A) = \frac{21+\sqrt{185}}{2}; \quad \kappa_2(A) = \frac{21+\sqrt{185}}{21-\sqrt{185}}, \quad \kappa_1(A) = \kappa_\infty(A) = \frac{25}{4}.$$

3) Risolvere il seguente sistema lineare con l'algoritmo di Gauss

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

SOLUZIONE:

La soluzione del sistema è $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$.

4) Eseguire i seguenti calcoli

1. $\mathcal{F} \left\{ \frac{\sin(2x) \cos(2x)}{xe^{2ix}} \right\}$ (Prova scritta - 29 gennaio 2019)

2. $\mathcal{F} \left\{ \delta(x+3) * e^{-|x|} \cos(5x) \right\}$ (Prova scritta - 13 febbraio 2019)

dove il simbolo $*$ indica la convoluzione e $\delta(x)$ è la delta di Dirac.

SOLUZIONE:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\sin(2x) \cos(2x)}{xe^{2ix}} \right\} = \frac{\pi}{2} [H(-k+2) - H(-k-6)]$$

$$\mathcal{F} \left\{ \delta(x+3) * e^{-|x|} \cos(5x) \right\} = e^{3ik} \left[\frac{1}{1+(k-5)^2} + \frac{1}{1+(k+5)^2} \right]$$