Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2020/2021
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 8 del 07/12/2020

Fattorizzazione PA=LU, metodi iterativi per risolvere sistemi lineari

1) Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 6x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 9x_2 + x_3 + 3x_4 = -8 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 10x_4 = -4, \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.
<u>SOLUZIONE</u>:

$$U = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 3/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 25/4 & 9/4 \\ 0 & 0 & 0 & 2491/225 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/8 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/9 & -32/75 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\det(A) = (-1)^{\text{scambi}} \prod_{i=1}^{4} u_{ii} = 4982.$
La soluzione del sistema è $\mathbf{x} = [0, -1, 1, 0]^T$.

2) (Prova scritta - 30 giugno 2017)
Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ed utilizzarla per calcolare il determinante di A e calcolare la seconda colonna di A^{-1}.
<u>SOLUZIONE</u>:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/5 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -12/5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\det(A) = 12.$
La seconda colonna della matrice inversa è $A^{-1}\mathbf{e}_2 = [-1/6, -5/6, 2/3, 1/2]^T$.

3) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dipendente da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \alpha & 3 & \alpha \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile. Si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = -1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0,0,0]^T$.
<u>SOLUZIONE</u>:
A è invertibile $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{9}{2}\}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $-\frac{9}{2} < \alpha < \frac{9}{2}$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1/3, 13/9, 22/27]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [22/27, 152/81, 233/243]^T$.

4) (Recupero seconda prova intermedia - 31 gennaio 2017)
Assegnato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro a il sistema ammette una sola soluzione e per quali valori il metodo iterativo di Gauss-Seidel risulta convergente. Fissato $a = 2$, calcolare le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.
<u>SOLUZIONE</u>:
Il sistema ammette un'unica soluzione se $a \neq \pm\sqrt{7}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $-\sqrt{7} < a < \sqrt{7}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1, 1/4, -1/2]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [-1/4, 7/8, -1/8]^T$.