Tutorato MATEMATICA APPLICATA

A.A. 2020/2021
Docente: Prof. Giuseppe Rodriguez
Tutor: Dott.ssa Federica Pes

Esercitazione 9 del 14/12/2020

PA=LU, metodi iterativi per sistemi lineari, metodi alle differenze finite, trasformata di Fourier

1) (tratto da Prova scritta - 27 ottobre 2017)
Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ed utilizzarla per calcolare il determinante di A e risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [0, -12, -6, -12]^T$. Inoltre calcolare la terza colonna di A^{-1}.
<u>SOLUZIONE</u>:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/8 & 1 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3/2 & -3/4 & 9/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\det(A) = -12$, la soluzione del sistema è $\mathbf{x} = [1, 0, -7, -6]^T$,
la terza colonna di A^{-1} è $A^{-1}\mathbf{e}_3 = [1/2, -1, -1/2, 1]^T$.

2) (Seconda prova intermedia - 10 gennaio 2018 - Compito 1)
Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} 2\alpha x_1 + \alpha x_3 = 1 \\ 2x_2 = -1 \\ \alpha x_1 + 2x_3 = 1, \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Si dica per quali valori di α la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]^T$.
<u>SOLUZIONE</u>:
A è non singolare se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 4$. Il metodo di Jacobi converge se $-4 < \alpha < 4$.
Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/4, -1/2, 3/4]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [-1/8, -1/2, 5/8]^T$.

3) (Seconda prova intermedia - 9 gennaio 2020 - Compito 2)
Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è definita positiva e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $\alpha = 3$, si dica, motivando opportunamente la risposta, se il metodo di Jacobi è convergente e si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.
<u>SOLUZIONE</u>:
A è definita positiva se $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge se $\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ o se $\alpha > \frac{\sqrt{3}}{3}$. Se $\alpha = 3$, il metodo di Jacobi converge perché A è diagonalmente dominante in senso stretto. Le iterazioni sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/6, 7/6, -1/2]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [7/12, 17/12, -1/9]^T$.

4) (Prova scritta - 12 giugno 2018)
Dire se il seguente problema di Cauchy è ben posto

$$\begin{cases} y' = -y^2 + 2, \\ y(0) = 1, \quad x \in [0, 10] \end{cases}$$

ed approssimarne la soluzione in $x = \frac{3}{2}$ mediante il metodo di Eulero con passo $h = \frac{1}{2}$.
<u>SOLUZIONE</u>:
Il problema ammette un'unica soluzione locale, in quanto la $f(x, y)$ è localmente Lipschitziana rispetto alla seconda variabile; $\eta_1 = \frac{3}{2}$, $\eta_2 = \frac{11}{8}$, $\eta_3 = \frac{183}{128}$.
η_3 approssima la soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

5) (Prova scritta - 6 luglio 2016)
Si approssimi la soluzione del seguente problema di Cauchy in $x = 1$

$$\begin{cases} y' = (1 + y)x, \quad x \in [0, 3] \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

utilizzando il seguente schema con passo $h = \frac{1}{2}$

$$\eta_{k+1} = \eta_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, \eta_k + \frac{h}{2} f(x_k, \eta_k)\right).$$

<u>SOLUZIONE</u>:
$\eta_1 = 5/4$, $\eta_2 = 563/256$. η_2 approssima la soluzione in $x = 1$.

6) Si approssimi la soluzione del seguente problema di Cauchy in $x = 1$

$$\begin{cases} y' = -\frac{2y}{x-2}, \quad x \in [0, 5] \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

mediante il metodo di Heun con passo $h = \frac{1}{2}$.
<u>SOLUZIONE</u>:
$\eta_1 = 7/4$, $\eta_2 = 91/24$.

7) (Prova scritta - 18 settembre 2019)
Eseguire il seguente calcolo

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{4ik}}{6 - 5ik - k^2}\right\}$$

<u>SOLUZIONE</u>:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{4ik}}{6 - 5ik - k^2}\right\} = e^{3x+8}(e^{-x} - e^4)H(-x - 4)$$