Esercitazione 22/11/2016

Esercizio 5. Dire per quali valori del parametro α reale la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

è non singolare e per quali valori risulta definita positiva (cioè ha tutti gli autovalori positivi).

Soluzione. Per trovare i valori di α per cui A è non singolare calcoleremo il determinante della matrice e lo imporremo diverso da 0.
Calcoliamo il determinante rispetto alla prima riga:
$det(A) = \alpha \cdot det \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} - det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \alpha(\alpha^2 - 1) - \alpha = \alpha(\alpha^2 - 2)$.
Verifichiamo per quali valori di α il determinante si annulla:
$\alpha(\alpha^2 - 2) = 0$ per $\alpha = 0$ e $\alpha^2 - 2 = 0$, cioè $\alpha = \pm\sqrt{2}$.
Possiamo quindi concludere che A è non singolare per $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{2}$.
Per verificare per quali valori di α A è definita positiva calcoliamo gli autovalori. Il polinomio caratteristico di A è dato da:

$$det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} (\alpha - \lambda) & 1 & 0 \\ 1 & (\alpha - \lambda) & 1 \\ 0 & 1 & (\alpha - \lambda) \end{bmatrix} =$$

$$= (\alpha - \lambda) \cdot det \begin{bmatrix} (\alpha - \lambda) & 1 \\ 1 & (\alpha - \lambda) \end{bmatrix} - det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & (\alpha - \lambda) \end{bmatrix} =$$

$$= (\alpha - \lambda) \left((\alpha - \lambda)^2 - 1 \right) - (\alpha - \lambda) = (\alpha - \lambda) \left((\alpha - \lambda)^2 - 2 \right).$$

Le radici del polinomio caratteristico saranno dunque gli autovalori

di A:
$\lambda_1 = \alpha$; $\lambda_2 = \alpha + \frac{\sqrt{8}}{2} = \alpha + \sqrt{2}$; $\lambda_3 = \alpha - \frac{\sqrt{8}}{2} = \alpha - \sqrt{2}$,
da cui ricaviamo che A è definita positiva per $\alpha > \sqrt{2}$.

Esercizio 6. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 3\beta & -\beta \\ 0 & -\beta & 2\beta \end{bmatrix}$$

dove α e β sono due parametri reali.

1. Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali è definita positiva.

2. Si calcoli per quali valori di β la matrice B è la matrice inversa di A.

3. Fissato un tale valore si determini al variare di α il condizionamento di A con indice 1, 2, ∞.

Soluzione.

1. Calcoliamo prima di tutto il determinante di A per sapere per quali valori di α la matrice è non singolare.
   $det(A) = \alpha \cdot det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 5\alpha$
   da cui si ricava che A è non singolare per $\alpha \neq 0$.
   Passiamo ora al calcolo degli autovalori. Come nell'esercizio precedente, calcoliamo il polinomio caratteristico:
   $det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} (\alpha - \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (2-\lambda) & 1 \\ 0 & 1 & (3-\lambda) \end{bmatrix} =$

$= (\alpha - \lambda) \cdot det \begin{bmatrix} (2-\lambda) & 1 \\ 1 & (3-\lambda) \end{bmatrix} = (\alpha - \lambda) \cdot [(2-\lambda)(3-\lambda) - 1] =$
$= (\alpha - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 5).$
Le radici del polinomio caratteristico sono:
$\lambda_1 = \alpha$; $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$; $\lambda_3 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$
da cui si ricava che A è definita positiva per $\alpha > 0$.

2. Per trovare i valori di β per cui B è l'inversa di A possiamo procedere in due modi:

   - calcoliamo $A \cdot B$ e lo imponiamo uguale alla matrice identità I
   - calcoliamo le entrate dell'inversa, le imponiamo uguali alle entrate di B e risolviamo per β.

   Nel primo caso si procede cos:

   $$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 3\beta & -\beta \\ 0 & -\beta & 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5\beta & 0 \\ 0 & 0 & 5\beta \end{bmatrix}$$

   da cui si ricava che $\beta = \frac{1}{5}$.
   Volendo seguire il secondo metodo, si calcolano le entrate non nulle dell'inversa di A:
   $b_{2,2} = \frac{3}{5}$; $b_{2,3} = b_{3,2} = -\frac{1}{5}$ e $b_{3,3} = \frac{2}{5}$
   e imponendole uguali alle entrate di B si ricava nuovamente che $\beta = \frac{1}{5}$.

3. Poichè la matrice A è simmetrica, la norma 1 e la norma infinito avranno lo stesso valore. Per trovarlo calcoliamo la norma di A e la norma della sua inversa:
   $$\|A\|_1 = max_j \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = max\,\{\alpha,\, 3,\, 4\} = max_i \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = \|A\|_\infty$$

$$\|A^{-1}\|_1 = max_j \sum_{i=1}^{3} |b_{ij}| = max\left\{\frac{1}{\alpha}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\} = max_i \sum_{j=1}^{3} |b_{ij}| = \|A^{-1}\|_\infty$$

Avremo quindi che:

$$k_1(A) = k_\infty(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = \begin{cases} \frac{4}{\alpha} & \text{se}\, \alpha < \frac{5}{4} \\ \frac{16}{5} & \text{se}\, \frac{5}{4} \leq \alpha \leq 4 \\ \frac{4\alpha}{5} & \text{se}\, \alpha > 4 \end{cases}$$

Per il calcolo del condizionamento in norma 2, invece, sfrutteremo la seguente formula:

$k_2(A) = \frac{\sqrt{max(autov(A^T A))}}{\sqrt{min(autov(A^T A))}}$

che nel caso di una matrice simmetrica diventa:

$k_2(A) = \frac{max(autov(A))}{min(autov(A))}$.

Ricordiamo che gli autovalori di A sono dati da: $\lambda_1 = \alpha$; $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$; $\lambda_3 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Da cui:

$$k_2(A) = \begin{cases} \frac{5+\sqrt{5}}{2\alpha} & \text{se}\, \alpha < \frac{5-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} & \text{se}\, \frac{5-\sqrt{5}}{2} \leq \alpha \leq \frac{5+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{2\alpha}{5-\sqrt{5}} & \text{se}\, \alpha > \frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Esercizio 10. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 14 \\ 2x_1 + 2x_2 + \frac{14}{3}x_3 = 20 \\ x_1 + \frac{7}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 = \frac{31}{2} \end{cases}$$

mediante l'algoritmo di Gauss con pivoting.

Soluzione. La matrice dei coefficienti del sistema è la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \frac{14}{3} \\ 1 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

mentre il vettore dei termini noti è dato da

$$b = \begin{bmatrix} 14 \\ 20 \\ \frac{31}{2} \end{bmatrix}$$

.

Vediamo esplicitamente i passaggi dell'algoritmo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 14 \\ 2 & 2 & \frac{14}{3} & 20 \\ 1 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{31}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{2,1}=\frac{1}{2}, m_{3,1}=\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & 13 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_{23}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 14 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{2,3}=\frac{1}{3}}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 14 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

La matrice triangolare superiore dunque è:

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 14 \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

il nuovo vettore dei termini noti è dato da

$$u = \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

la matrice di permutazione P (ottenuta a partire dall'Identità, effettuando gli stessi scambi di righe che abbiamo fatto nell'algoritmo) è:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

infine la matrice triangolare inferiore unitaria (ottenuta inserendo i moltiplicatori ed effettuando gli stessi scambi di righe fatti nell'algoritmo) è:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo dunque risolvere il sistema triangolarizzato:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 14 \\ 3x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_3 = 3 \end{cases} ; \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 14 \\ 3x_2 + 6 = 12 \\ x_3 = 3 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4 + 3 = 14 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases} ; \begin{cases} 4x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è il vettore:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

.