Esercitazione 29/11/2016

Esercizio 9. Calcolare il numero di condizionamento in norma 1, 2 e ∞ della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Calcoliamo prima di tutto l'inversa di A, che ci servirà

per il condizionamento in norma 1 e in norma ∞.

$$A^{-1} = det(A) \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Si avrà:

$\|A\|_1 = max_j \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}| = \{3, 2\} = 3,$

$\|A^{-1}\|_1 = max_j \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}| = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{3}{4},$

da cui:

$k_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$

Per quanto riguarda la norma ∞, invece, si ha:

$\|A\|_\infty = max_i \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \{3, 2\} = 3,$

$\|A^{-1}\|_\infty = max_i \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{3}{4},$

da cui:

$k_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$

Per calcolare il condizionamento in norma 2 useremo la formula

$$k_2(A) = \frac{\sqrt{max(autov(A^TA))}}{\sqrt{min(autov(A^TA))}}$$

Calcoliamo A^TA:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = B.$$

Gli autovalori della matrice B saranno le radici del polinomio caratteristico:
$det(B - \lambda I) = det \begin{bmatrix} (4-\lambda) & 2 \\ 2 & (5-\lambda) \end{bmatrix} = (4-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$.
Avremo quindi:
$k_2(A) = \frac{\sqrt{max(autov(A^TA))}}{\sqrt{min(autov(A^TA))}} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{9-\sqrt{17}}} = 1.64$.

Esercizio 15. Dopo aver calcolato la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

la si utilizzi per calcolare il determinante di A e la terza colonna della sua inversa.

Soluzione. Svolgiamo i passaggi dell'algoritmo di Gauss con pivoting per trovare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice data.

$$\begin{bmatrix}0&4&0&6\\4&0&6&0\\0&4&0&2\\4&0&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{S_{12}}\begin{bmatrix}4&0&6&0\\0&4&0&6\\0&4&0&2\\4&0&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{m_{4,1}=1}\begin{bmatrix}4&0&6&0\\0&4&0&6\\0&4&0&2\\0&0&-4&0\end{bmatrix}\xrightarrow{m_{3,2}=1}$$

$$\begin{bmatrix}4&0&0&6\\0&4&0&6\\0&0&0&-4\\0&0&-4&0\end{bmatrix}\xrightarrow{S_{34}}\begin{bmatrix}4&0&6&0\\0&4&0&6\\0&0&-4&0\\0&0&0&-4\end{bmatrix}=U.$$

La matrice di permutazione (ottenuta a partire dall'Identità, effettuando gli stessi scambi di righe che abbiamo fatto nell'algoritmo) è:

$$P=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

La matrice triangolare inferiore unitaria L (ottenuta inserendo i moltiplicatori ed effettuando gli stessi scambi di righe fatti nell'algoritmo) è:

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

Per calcolare il determinante di A sfruttiamo il teorema di Binet: $det(A) = det(P^{-1} \cdot L \cdot U) = det(P^{-1}) \cdot det(L) \cdot det(U)$.
Notiamo inoltre che il determinante di una matrice di permutazione vale 1 se è ottenuta con un numero pari di scambi di righe e -1 se è ottenuta con un numero dispari di scambi, e ricordiamo che il derminante delle matrici triangolari è dato dal prodotto delle entrate

della diagonale, quindi $det(L) = 1$. Possiamo quindi concludere che: $det(A) = det(U) = 256$.
Per quanto riguarda il calcolo della terza colonna dell'inversa, osserviamo che si riduce alla soluzione di una coppia di sistemi lineari dati dalla formula:

$$\begin{cases} Ly_i = b_i \\ Ux_i = y_i \end{cases}$$

se imponiamo $b_i = (0, 0, 1, 0)^T$, cioè la colonna dell'identità corrispondente alla colonna dell'inversa che ci interessa. Effettuando gli stessi scambi che abbiamo effettuato nell'algoritmo di Gauss, il vettore b_i diventa $b_i = (0, 0, 0, 1)^T$. Risolviamo il primo sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_1 + y_3 = 0 \\ y_2 + y_4 = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Passiamo al secondo sistema:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 4x_1 + 6x_3 = 0 \\ 4x_2 + 6x_4 = 0 \\ -4x_3 = 0 \\ -4x_4 = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{3}{8} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Quindi la terza colonna dell'inversa di A è $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{8} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Esercizio 17. Calcolare le prime due iterazioni $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ risultati dall'applicazione dell'algoritmo di Gauss-Seidel al sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

utilizzando il vettore iniziale $x^{(0)} = (0,\, 0,\, 0)^T$. Dire se il metodo risulta convergente.

Soluzione. Innanzitutto scomponiamo la matrice dei coefficienti del sistema nelle tre matrici D, E, F:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} ;\ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} ;\ F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per calcolare la matrice di iterazione B ci servirà la matrice $(D-E)^{-1}$:

$$(D-E) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (D-E)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

quindi la matrice di iterazione sarà:

$$B = (D-E)^{-1} \cdot F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

mentre il vettore f è dato da:

$$f = (D-E)^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}.$$

Passiamo ora al calcolo delle prime due iterazioni:

$$x^{(1)} = B \cdot x^{(0)} + f = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = B \cdot x^{(1)} + f = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{9}{4} \\ \frac{15}{8} \end{bmatrix}.$$

Per quanto riguarda il controllo della convergenza, il metodo più veloce consiste nel verificare che il raggio spettrale di B abbia modulo minore di 1.

Ricordiamo che il raggio spettrale di una matrice è dato dalla formula $\rho(B) = max_i|\lambda_i|$, quindi ci serve calcolare gli autovalori di B.

$$det(B - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + \frac{1}{2}b^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}$; $\lambda_{2,3} = 0$.

Da cui si ha:

$\rho(B) = \frac{1}{2} < 1$

per cui l'algoritmo converge.