Esercitazione 06/12/2016

Esercizio 19. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

dire per quali valori del parametro reale α la matrice A risulta non singolare e per quali il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $Ax = b$ con $b = (3,\ 2,\ 4,\ 2)^T$ risulta convergente.
Fissato inoltre $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterazioni $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema lineare $Ax = b$ con vettore iniziale $x^{(0)} = (0,\ 1,\ 0,\ 1)^T$.

Soluzione. Per la prima parte dell'esercizio, calcoliamo il determinante di A:

$$det(A) = det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} = 2 \cdot det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} =$$

$$= 2\left(2 \cdot det \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} - det \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}\right) = 2\left(2(2\alpha^2 - \alpha^2) - \alpha^2\right) = 2\alpha^2$$

da cui ricaviamo che A è non singolare per $\alpha \neq 0$.

Per verificare la convergenza del metodo di Jacobi, bisogna calcolare il raggio spettrale della matrice di iterazione B. Per farlo, scomponiamo la matrice A nelle tre matrici D, E e F e calcoliamo $B = D^{-1}(E + F)$.

In questo caso avremo:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} ; \; E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix} ; \; F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'inversa di D sarà:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2} \end{bmatrix}$$

Possiamo quindi calcolare la matrice di iterazione B:

$$B \;=\; D^{-1} \cdot (E + F) \;=\; \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

Per calcolare il raggio spettrale $\rho(B)$ dobbiamo trovare gli autovalori di B, cioè le radici del polinomio caratteristico:

$$det(B - \lambda I) = det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\lambda & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda \cdot det \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\lambda & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda \left(-\lambda \cdot det \begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{1}{\alpha} & -\lambda \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot det \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = -\lambda \left(-\lambda^3 - \frac{\lambda}{4} \right) =$$

$\lambda^3 \left(\lambda + \frac{1}{4}\right)$.

Gli autovalori dunque saranno $\lambda_1 = 0$ con molteplicità 3 e $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ con molteplicità 1. Il raggio spettrale di B è dato da:
$\rho(B) = |max(autov(B))| = \frac{1}{4} < 1$
per cui possiamo concludere che il metodo di Jacobi converge.

Passiamo ora al calcolo delle prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel. Prima di procedere bisogna calcolare la matrice $B = (D - E)^{-1}N$ e il vettore $f = (D - E)^{-1}b$, per cui ci servirà l'inversa di

$$P = (D - E) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ottenuta sostituendo $\alpha = 1$ nelle matrici ricavate per il metodo di Jacobi.
Per il calcolo dell'inversa si può procedere sia con i cofattori che risolvendo i sistemi triangolari inferiori aventi come termini noti i vettori colonna della matrice identità. Con entrambi i procedimenti si giungerà al risultato:

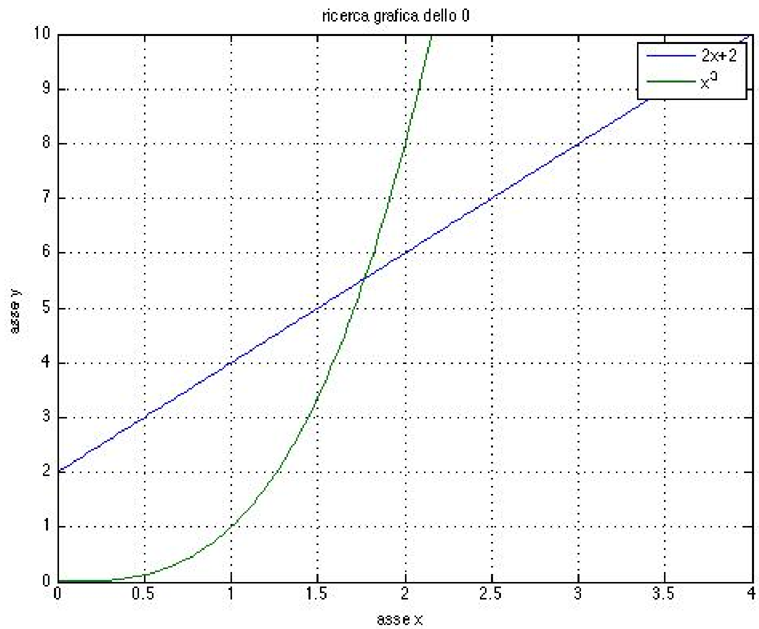
$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di iterazione B sarà:
$$B = P^{-1}N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
mentre il vettore f sarà:
$$f = P^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$
Possiamo finalmente passare al calcolo delle prime due iterazioni, secondo la formula $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + f$:
$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$
$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} \\ 0 \\ -\frac{7}{16} \\ \frac{7}{16} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ 1 \\ \frac{13}{16} \\ \frac{19}{16} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 21. Determinare un intervallo che contenga uno zero dell'equazione
$$x^3 - 2x - 2 = 0$$
e calcolare le prime due iterazioni del metodo di Newton, utilizzando il punto iniziale $x_0 = 2$. Dire se la convergenza del metodo è del primo o del secondo ordine.

Soluzione. Il polinomio dato non è scomponibile con metodi noti.

Cerchiamo una radice positiva con il metodo grafico:



L'intervallo in cui si trova lo 0 del polinomio è [1, 2].
Per applicare il metodo di Newton calcoliamo la derivata $f'(x) = 3x^2 - 2$ e procediamo con le prime due iterazioni:

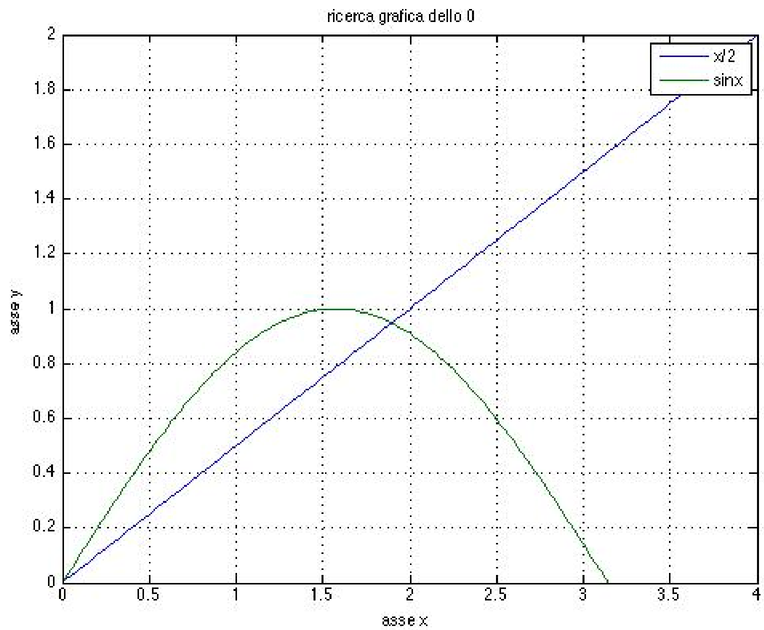
- $f(x_0) = f(2) = 2 \neq 0$;
  $f'(x_0) = f'(2) = 10 \neq 0$;
  $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$
- $f(x_1) = f(\frac{9}{5}) = \frac{29}{125} \neq 0$;
  $f'(x_1) = f'(\frac{9}{5}) = \frac{193}{25} \neq 0$;
  $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{9}{5} - \frac{29}{965} = \frac{1708}{965} = 1.7699$.

  Concludiamo ricordando che poichè $f'(x_0) \neq 0$ e $f''(x)$ è continua, la convergenza del metodo è del secondo ordine.

Esercizio 23. Determinare l'intervallo $[k,\, k+1]$, con k intero, che contenga la radice positiva dell'equazione

$$x - 2sinx = 0$$

e dire se la radice è singola o multipla. Calcolare le prime tre iterazioni del metodo di bisezione a partire dall'intervallo determinato.
Soluzione. Anche in questo caso ci conviene procedere alla ricerca della radice con il metodo grafico:



da cui si ricava che lo 0 si trova nell'intervallo $[1,\, 2]$.
Verifichiamo che la funzione cambii segno nell'intervallo:
$f(1) = 1 - 2sin(1) = 1 - 1.68 < 0$
$f(2) = 2 - 2sin(2) = 2 - 1.82 > 0$
e procediamo con il calcolo delle prime tre iterazioni dell'algoritmo.

- $c = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$
  $f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} - 2sin(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} - 2 < 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2},\, b = 2.$

- $c = \frac{\frac{3}{2}+2}{2} = \frac{7}{4}$
  $f(\frac{7}{4}) = \frac{7}{4} - 2sin(\frac{7}{4}) = \frac{7}{4} - 1.96 < 0 \Rightarrow a = \frac{7}{4}$, $b = 2$.
- $c = \frac{\frac{7}{4}+2}{2} = \frac{15}{8}$
  $f(\frac{15}{8}) = \frac{15}{8} - 2sin(\frac{15}{8}) = \frac{15}{8} - 1.9 < 0 \Rightarrow a = \frac{15}{8}$, $b = 2$.

La migliore approssimazione della radice sarà quindi $c = \frac{\frac{15}{8}+2}{2} = \frac{31}{16} = 1.94$.