Esercitazione 14/12/2016

Esercizio 18. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \beta & \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con α, $\beta \in \mathbb{R}$.
Stabilire per quali valori del parametri α e β la matrice A è invertibile e per quali è simmetrica e definita positiva.
Si consideri poi il sistema $Ax = b$ con $b = (1, -2, 0)^T$. Si studi al variare dei parametri α e β la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema e si calcolino le prime due iterate partendo dal vettore iniziale $x^{(0)} = (0, 1, 0)^T$.
Soluzione. Calcoliamo il determinante di A:

$$det(A) = det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \beta & \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha \cdot \begin{bmatrix} \beta & \frac{1}{2} \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} + \alpha(-\alpha\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2}.$$

La matrice A dunque è non singolare per $\alpha \neq \pm 1$ e $\forall \beta \in \mathbb{R}$.
Ricaviamo il polinomio caratteristico per calcolare gli autovalori:

$$det(A-\lambda I) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & \alpha \\ \beta & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ \alpha & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda) \cdot det \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} + \alpha \cdot \begin{bmatrix} \beta & \frac{1}{2}-\lambda \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = (1-\lambda)\left[(\tfrac{1}{2}-\lambda)(1-\lambda)\right] + \alpha\left[-\alpha(\tfrac{1}{2}-\lambda)\right] = -\lambda^3 + \frac{5}{2}\lambda^2 + (\alpha^2-2)\lambda + \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Le radici del polinomio caratteristico sono: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm \alpha$, da cui studiando il segno si ricava che A è definita positiva per

$-1 \leq \alpha \leq 1$. Perchè A sia anche simmetrica basta richiedere $\beta = 0$.
Passiamo ora allo studio della convergenza per il metodo di Jacobi.
Prima di tutto scomponiamo la matrice A nelle tre matrici D, E ed F:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix};\ F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e calcoliamo la matrice di iterazione:

$$B = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ -\beta & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ -2\beta & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per studiare la convergenza dobbiamo calcolare il raggio spettrale della matrice di iterazione B. Il polinomio caratteristico è dato da:

$$det(B-\lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -\alpha \\ -2\beta & -\lambda & 0 \\ -\alpha & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda \cdot det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} - \alpha \cdot det \begin{bmatrix} -2\beta & -\lambda \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda(\lambda^2) - \alpha(-\alpha\lambda) = \lambda(-\lambda^2 + \alpha^2)$$

le cui radici sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{2,3} = \pm\alpha$.
Se vogliamo che il metodo di Jacobi converga, quindi, dobbiamo richiedere che $\rho(B) < 1$, cioè che $|\alpha| < 1$.
Per calcolare le prime due iterate del metodo ricaviamo anche:

$$f = D^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Avremo quindi che:

$$x^{(1)} = Bx^{x(0)} + f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ -2\beta & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Bx^{x(1)} + f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ -2\beta & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2\beta - 4 \\ -\alpha \end{bmatrix}.$$

Esercizio 22. Determinare l'intervallo $[k,\, k+1]$, con k intero, che contenga la radice positiva dell'equazione

$$x^2 - x - 5 = 0$$

e dire se la radice è singola e multipla. Calcolare le prime tre iterazioni del metodo di bisezione a partire dall'intervallo determinato.

Soluzione. Le radici del polinomio sono $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{20}}{2}$, quindi la radice positiva $x_1 = \frac{1+\sqrt{20}}{2} = 2.73$ è contenuta nell'intervallo $[2,\, 3]$ ed è una radice singola.
Il polinomio cambia effettivamente segno nell'intervallo trovato, in quanto $p(2) = -2 < 0$ e $p(3) = 1 > 0$, possiamo quindi procedere al calcolo delle prime tre iterate:

- $c = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$; $p(\frac{5}{2}) = \frac{25}{4} - \frac{5}{2} - 5 = -\frac{5}{4} < 0 \Rightarrow$ il nuovo intervallo è $[\frac{5}{2},\, 3]$;
- $c = \frac{\frac{5}{2}+3}{2} = \frac{11}{4}$; $p(\frac{11}{4}) = -\frac{3}{16} < 0 \Rightarrow$ il nuovo intervallo è $[\frac{11}{4},\, 3]$;
- $c = \frac{\frac{11}{4}+3}{2} = \frac{23}{8}$; $p(\frac{23}{8}) = \frac{25}{64} > 0 \Rightarrow$ il nuovo intervallo è $[\frac{11}{4},\, \frac{23}{8}]$.

La migliore approssimazione della radice sarà data da $c = \frac{\frac{11}{4}+\frac{23}{8}}{2} = \frac{45}{16} = 2.81$.

Esercizio 24. Scrivere l'espressione del metodo di Newton per il calcolo del valore di $\sqrt{2}$. Partendo dal punto iniziale $x_0 = 2$ si calcolino le prime tre iterazioni del metodo. Dire se la convergenza è del primo o del secondo ordine.

Soluzione. Per usare il metodo di Newton per calcolare il valore di $\sqrt{2}$ ci serve un'equazione non lineare che abbia come soluzione $\sqrt{2}$. Scegliamo $p(x): \ x^2 - 2 = 0$, la cui radice positiva è proprio $\sqrt{2}$, e applichiamo il metodo di Newton a partire da $x_0 = 2$.

- $p(2) = 2$; $p'(2) = 4 \Rightarrow x_1 = 2 - \frac{p(2)}{p'(2)} = \frac{3}{2}$
- $p\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$; $p'\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} - \frac{p\left(\frac{3}{2}\right)}{p'\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{17}{12}$
- $p\left(\frac{17}{12}\right) = \frac{1}{144}$; $p'\left(\frac{17}{12}\right) = \frac{17}{6} \Rightarrow x_3 = \frac{17}{12} - \frac{p\left(\frac{17}{12}\right)}{p'\left(\frac{17}{12}\right)} = \frac{577}{408}$.

Notiamo che $\frac{577}{408} = 1.414215$, cioè approssima $\sqrt{2}$ fino alla quinta cifra decimale. Osserviamo inoltre che poichè la radice è semplice abbiamo che la convergenza è del secondo ordine.

Esercizio 25. Determinare la forma di lagrange del polinomio che interpola $\sin(2x)$ nei punti di ascissa 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ e valutarlo in $x = -\frac{\pi}{4}$. Cosa si può dire, in questo esempio, sull'errore di interpolazione?

Soluzione. Il polinomio di Lagrange $p(x)$ è dato da $p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)L_i(x)$, dove $L_i(x) = \displaystyle\prod_{k \neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$.
Nel nostro caso dunque avremo:

- $L_0(x) = \frac{x-\frac{\pi}{4}}{-\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{x-\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}\frac{2}{\pi}(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{2})$;

- $L_1(x) = \frac{x}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{4}{\pi}\right);$

- $L_2(x) = \frac{x}{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{x-\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}x\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$

E il polinomio sarà $p(x) = L_1(x)$, che in $-\frac{\pi}{4}$ vale $p(-\frac{\pi}{4}) = \frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{4}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{4}{\pi}\right) = 3.$
Per quanto riguarda l'errore di interpolazione, in questo esercizio è possibile calcolarlo esplicitamente nella forma:
$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x) \leq C \cdot \omega_2(x) = C \cdot x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
e notare la dipendeza dai punti scelti per scrivere il polinomio interpolante.

Esercizio 26. Costruire il polinomio che interpola la sguente tabella di dati:

x_i	0	1	2
$y(x_i)$	1	1	2

sia nella base canonica che nella forma di Lagrange. Utilizzare la forma di Lagrange per calcolare il polinomio interpolante nel punto di ascissa -1.

Soluzione. Come nell'esercizio precedente, calcoleremo il polinomio di Lagrange $p(x)$ come $p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)L_i(x)$, dove $L_i(x) = \displaystyle\prod_{k\neq j} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$.
Sostituendo troviamo:

- $L_0(x) = \frac{x-1}{-1} \cdot \frac{x-2}{-2} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2);$

- $L_1(x) = \frac{x}{1} \cdot \frac{x-2}{1-2} = -x(x-2)$
- $L_2(x) = \frac{x}{2} \cdot \frac{x-1}{2-1} = \frac{1}{2}x(x-1)$.

Abbiamo dunque che $p(x) = L_0(x) + L_1(x) + 2L_2(x)$ e $p(-1) = L_0(-1) + L_1(-1) + 2L_2(-1) = 2$.
Per il calcolo del polinomio interpolante in forma canonica, invece, iniziamo trovando la matrice di Vandermonde:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

e procediamo trovando la sua fattorizzazione $PX = LU$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};\ L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix};\ U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

.
Per trovare i coefficienti del polinomio interpolante in forma canonica dovremo risolvere due sistemi lineari:

$$\begin{cases} L \cdot z = Py \\ U \cdot a = z \end{cases}$$

in cui y è il vettore (1, 1, 2) delle ordinate e a sarà il vettore dei coefficienti del polinomio.

$$L \cdot z = Py;\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 1 \\ z_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$U \cdot a = z;\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -\frac{1}{2} \\ a_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Possiamo quindi concludere che il polinomio interpolante in forma canonica è:
$p(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2$.