Esercitazione 21/12/2016

Esercizio 1 . Dati i tre numeri $a = -37679$, $b = 37654$ e $c = 25.874$ si calcolino le quantità $(a+b)+c$ e $a+(b+c)$ in un sistema in virgola mobile in base 10 con mantissa di 5 cifre significative. Commentare i risultati.

Soluzione. Prima di tutto convertiamo i numeri a, b e c nel sistema in virgola mobile richiesto. Avremo $fl(a) = -0.37679 \cdot 10^5$, $fl(b) = 0.37654 \cdot 10^5$ e $fl(c) = 0.25874 \cdot 10^2$.

Calcoliamo ora le due somme richieste:

- $s_1 = (a + b) + c$

  Calcoliamo prima $(a + b)$:

  $$\begin{array}{rl} -0.37679 \cdot 10^5 & + \\ 0.37654 \cdot 10^5 & = \\ \hline -0.00025 \cdot 10^5 & \end{array}$$

  Convertiamo $(a + b)$ in virgola mobile e otteniamo $fl(a + b) = -0.25 \cdot 10^2$. Sommiamo c al valore ottenuto:

  $$\begin{array}{rl} -0.25000 \cdot 10^2 & + \\ 0.25874 \cdot 10^2 & = \\ \hline -0.00874 \cdot 10^2 & \end{array}$$

  Il risultato finale sarà dunque $fl(s_1) = 0.874 \cdot 10^0$.

- $s_2 = a + (b + c)$

  Calcoliamo prima $b + c$:

  $$\begin{array}{rl} 0.37654000 \cdot 10^5 & + \\ 0.00025874 \cdot 10^5 & = \\ \hline 0.37679874 \cdot 10^5 & \end{array}$$

  Per convertire $b + c$ in virgola mobile dobbiamo arrotondare, ottenendo $fl(b + c) = 0.37680 \cdot 10^5$. Sommiamo a al risultato ottenuto:

$$\begin{array}{rl} 0.37680 \cdot 10^5 & + \\ -0.37679 \cdot 10^5 & = \\ \hline -0.00001 \cdot 10^5 & \end{array}$$

Avremo quindi $fl(s_2) = 0.1 \cdot 10^1$.

Il valore esatto che avremmo dovuto ottenere è $x = 0.874$. Notiamo quindi che per s_1 l'errore è nullo (infatti non abbiamo dovuto mai arrotondare), mentre per s_2 il calcolo dell'errore relativo ci dà: $\epsilon_2 = \frac{|x-s_2|}{|x|} = \frac{0.0874-0.1}{0.0874} = 0.14$.

Esercizio 11 . Si consideri la matrice $A = B + B^T$, dove

$$B = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

. Si dica per quali valori di α reale la matrice A è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Jacobi applicato al sistema $Ax = b$ con $b = [0,\, 1,\, 2]^T$. Infine, posto $\alpha = \frac{1}{3}$ si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ e la si utilizzi per calcolare l'inversa di A.

Soluzione. Calcoliamo prima di tutto la matrice A come richiesto nel testo e otteniamo:

$$A = \begin{bmatrix} 4\alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

Il suo determinante sarà:

$$detA = det \begin{bmatrix} 4\alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix} = 2\alpha \begin{bmatrix} 4\alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha \end{bmatrix} = 14\alpha^3.$$

La matrice A quindi è invertibile per $\alpha \neq 0$.

Per quanto riguarda gli autovalori, calcoliamo le radici del polinomio caratteristico:

$$det(A-\lambda I) = det\begin{bmatrix} 4\alpha-\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & 2\alpha-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha-\lambda \end{bmatrix} = (2\alpha-\lambda)\cdot det\begin{bmatrix} 4\alpha-\lambda & \alpha \\ \alpha & 2\alpha-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(2\alpha-\lambda)\left((4\alpha-\lambda)(2\alpha-\lambda)-\alpha^2\right) = \lambda^3+8\alpha\lambda^2+19\alpha^2\lambda-14\alpha^3$$

che si annulla per $\lambda_1 = 2\alpha$, $\lambda_{2,3} = 3\alpha \pm \alpha\sqrt{2}$.

Studiando i segni degli autovalori si trova che sono tutti e tre positivi per $\alpha > 0$.

Passiamo ora allo studio della convergenza del metodo di Jacobi, per cui ci servirà la matrice di iterazione $D^{-1}(E+F)$. Nel nostro caso avremo:

$$D = \begin{bmatrix} 4\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix};\ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ F = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi la matrice di iterazione sarà data da:

$$B = D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per verificare che il metodo converga dobbiamo verificare che $\rho(B) < 1$,quindi ci servono gli autovalori di B.

$$det(B-\lambda I) = det\begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda\cdot det\begin{bmatrix} -\lambda & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda(\lambda^2-\tfrac{1}{8})$$

da cui otteniamo che gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Il raggio spettrale di B dunque è $\rho(B) = |\frac{1}{2\sqrt{2}}| < 1$ e il metodo converge.

Imponiamo ora $\alpha = \frac{1}{3}$. La matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

La sua fattorizzazione $PA = LU$ è:

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{21}=\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = U,$$

$$P = I \text{ e } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare l'inversa sfruttando la fattorizzazione $PA = LU$ dobbiamo risolvere tre coppie di sistemi lineari della forma:

$$\begin{cases} Ly_i = b_i \\ Ux_i = y_i \end{cases}$$

dove b_i sono le colonne della matrice identità. In particolare avremo:

- $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{cases} y_1 = & 1 \\ \frac{1}{4}y_1 + y_2 = & 0 \\ y_3 = & 0 \end{cases}; \begin{cases} y_1 = & 1 \\ y_2 = & -\frac{1}{4} \\ y_3 = & 0 \end{cases}$$

  $$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{cases} \frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = & 1 \\ \frac{7}{12}x_2 = & -\frac{1}{4} \\ x_3 = & 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = & \frac{6}{7} \\ x_2 = & -\frac{3}{7} \\ x_3 = & 0 \end{cases}$$

- $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{cases} y_1 = & 0 \\ y_2 = & 1 \\ y_3 = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{cases} \frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = & 1 \\ \frac{7}{12}x_2 = & 1 \\ x_3 = & 0 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = & -\frac{3}{7} \\ x_2 = & \frac{12}{7} \\ x_3 = & 0 \end{cases}$$

- $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{cases} y_1 = & 0 \\ y_2 = & 0 \\ y_3 = & 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{cases} \frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = & 0 \\ \frac{7}{12}x_2 = & 0 \\ \frac{2}{3}x_3 = & 1 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = & 0 \\ x_2 = & 0 \\ x_3 = & \frac{3}{2} \end{cases}$$

L'inversa di A per $\alpha = \frac{1}{3}$ dunque è:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \\ -\frac{3}{7} & \frac{12}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 27 . Esprimere nella forma di Lagrange il polinomio che interpola la seguente tabella di dati:

x_i	-2	-1	0	3
$y(x_i)$	-15	-4	-1	30

e calcolare il suo valore nel punto di ascissa $x = -1$.

Soluzione. Calcoleremo il polinomio di Lagrange $p(x)$ come $p(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)L_i(x)$, dove $L_i(x) = \prod_{k \neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$.

Sostituendo troviamo:

$L_0(x) = \frac{x+1}{-2+1} \cdot \frac{x}{-2} \cdot \frac{x-3}{-2-3} = -(x+1)(-\frac{x}{2})(-\frac{x-3}{5});$

$L_1(x) = \frac{x+2}{-1+2} \cdot \frac{x}{-1} \cdot \frac{x-3}{-1-3} = (x+2)(-x)(-\frac{x-3}{4});$

$L_2(x) = \frac{x+2}{2} \cdot \frac{x+1}{-1} \cdot \frac{x-3}{-3} = (\frac{x+1}{2})(x+1)(-\frac{x-3}{3});$

$L_3(x) = \frac{x+2}{3+2} \cdot \frac{x+1}{3+1} \cdot \frac{x}{3} = (\frac{x+2}{5})(\frac{x+1}{4})(\frac{x}{3})$.
Da cui ricaviamo che $p(x) = -15L_0(x) - 4L_1(x) - L_2(x) + 20L_3(x)$.
Nel punto di ascissa $x = -1$ il polinomio assume il valore:
$p(-1) = -4L_1(-1) = -4$.

Esercizio (supplementare sui numeri macchina) . Dati i tre numeri $a = 0.02345$, $b = 0.23456$ e $c = 0.23454$ si calcolino le quantità $(a + b) - c$ e $a + (b - c)$ in un sistema in virgola mobile in base 10 con mantissa di 4 cifre significative. Commentare i risultati.
Soluzione. Convertiamo le tre cifre date nel sistema in virgola mobile assegnato: $fl(a) = 0.2345 \cdot 10^{-1}$, $fl(b) = 0.2346 \cdot 10^0$ e $fl(c) = 0.2345 \cdot 10^0$. Notiamo che abbiamo già dovuto effettuare degli arrotondamenti nella conversione di b e c, quindi ci aspettiamo di trovare un errore non nullo sia per s_1 che per s_2. Calcoliamo separatemente le due somme richieste e confrontiamo i risultati.

- $s_1 = (a + b) - c$
  Calcoliamo prima $(a + b)$:
  $$\begin{array}{l} 0.02345 \cdot 10^0 \;\; + \\ 0.23460 \cdot 10^0 \;\; = \\ \hline 0.25805 \cdot 10^0 \end{array}$$
  Effettuiamo un ulteriore arrotondamento per convertire $(a+b)$ e otteniamo $fl(a + b) = 0.2581 \cdot 10^0$. Procediamo ora con la sottrazione:
  $$\begin{array}{l} 0.2581 \cdot 10^0 \;\; - \\ 0.2345 \cdot 10^0 \;\; = \\ \hline 0.0236 \cdot 10^0 \end{array}$$
  Abbiamo trovato dunque $fl(s_1) = 0.236 \cdot 10^{-1}$.

- $s_2 = a + (b - c)$
  Svolgiamo prima la sottrazione:

$$\begin{array}{l} 0.2346 \cdot 10^{0} \quad - \\ 0.2345 \cdot 10^{0} \quad = \\ \hline 0.0001 \cdot 10^{0} \end{array}$$

Trasformiamo $b - c$ in virgola mobile e otteniamo $fl(b - c) = 0.1 \cdot 10^{-3}$. Sommiamo ad a il risultato appena ottenuto:

$$\begin{array}{l} 0.2345 \cdot 10^{-1} \quad + \\ 0.0010 \cdot 10^{-1} \quad = \\ \hline 0.2355 \cdot 10^{-1} \end{array}$$

Procediamo ora alla valutazione dell'errore. Il risultato esatto è $x = 0.02347$, quindi otteniamo:
$\epsilon_1 = \frac{|0.02347 - 0.236|}{|0.02347|} = 0.00554$ per s_1 e $\epsilon_2 = \frac{|0.2347 - 0.2355|}{|0.2347|} = 0.0034$ per s_2.