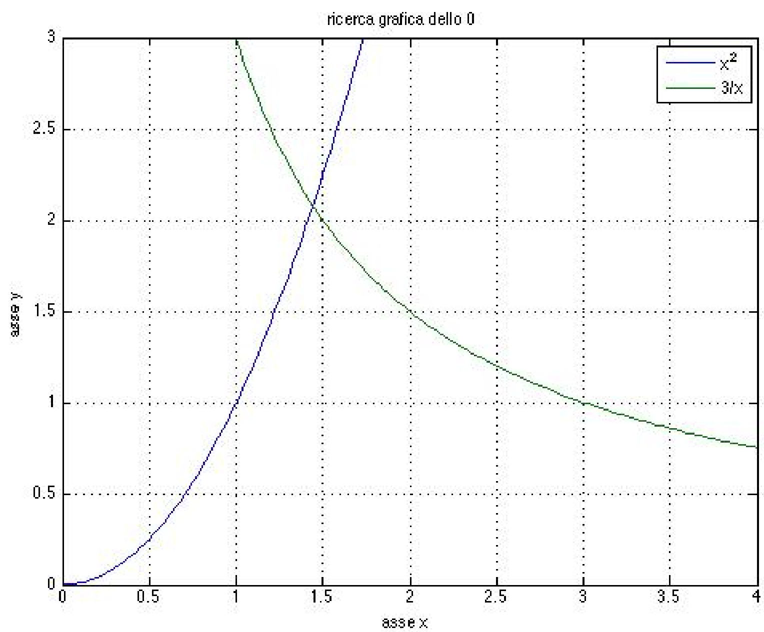
Esercitazione 16/02/2017

Esercizio 4 del 1/02/2017. Determinare l'intervallo $[k, k+1]$, con k intero, che contenga la radice positiva dell'equazione

$$x^2 - \frac{3}{x} = 0$$

Dire se la radice è singola o multipla, giustificando la risposta, e calcolare la prima iterazione del metodo di Newton a partire da entrambi gli estremi dell'intervallo determinato. Dire qual è l'ordine di convergenza del metodo, giustificando la risposta.

Soluzione. Per trovare la radice α usiamo il metodo grafico, con cui ricaviamo che l'intervallo in cui è contenuta è [1, 2]



Possiamo dire inoltre che la radice è singola, poichè la derivata

$f'(x) = 2x + \frac{3}{x^2}$ è positiva in α (nel caso $f'(x) = 0$ avremmo avuto una radice multipla). Per questo motivo la convergenza del metodo è del secondo ordine.
Calcoliamo ora la prima iterazione del metodo di Newton a partire dai due estremi:

- per il primo estremo $x_0 = 1$ troviamo che $f(1) = -2$ e $f'(1) = 5 \Rightarrow x_1 = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$
- per il secondo estremo $x_0 = 2$ invece si ha $f(2) = \frac{5}{2}$ e $f'(2) = \frac{19}{4} \Rightarrow x_1 = 2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{19}{4} = \frac{28}{19}$.

Esercizio 5 del 01/02/2017 Determinare, utilizzando la base canonica, il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-2	0	2
y_i	0	-1	0

e calcolare il suo valore nel punto di ascissa $x = 1$.

Soluzione. Per prima cosa scriviamo la matrice di Vandermonde:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

la cui fattorizzazione $PX = LU$ sarà data da:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ;\ L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} ;\ U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Passiamo ora alla risoluzione dei due sistemi:

$$\begin{cases} L \cdot z = Py \\ U \cdot a = z \end{cases}$$

il secondo sistema infatti avrà come soluzioni i coefficienti del polinomio interpolante in forma canonica.

$$L \cdot z = Py; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \\ z_3 = -1 \end{cases}$$

$$U \cdot a = z; \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

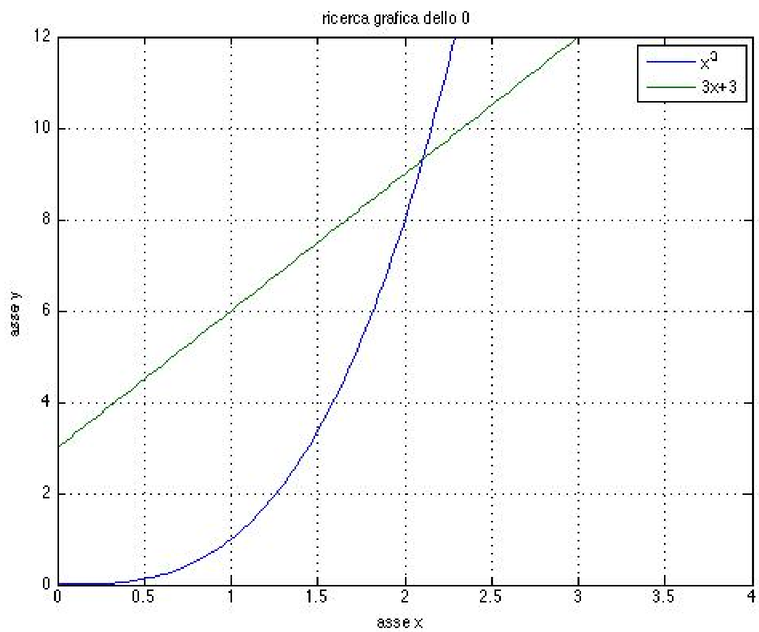
Il polinomio interpolante in forma canonica sarà quindi:
$P(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$, che valutato nel punto di ascissa 1 vale $P(1) = -\frac{3}{4}$.

Esercizio 4 del 16/01/2017 Determinare il più piccolo intervallo con estremi interi che contenga la radice positiva dell'equazione

$$x^3 - 3x - 3 = 0$$

Dire se la radice è singola o multipla, giustificando la risposta, e calcolare le prime tre iterazioni del metodo di bisezione a partire dall'intervallo determinato. Che ordine di convergenza avrebbe il metodo di Newton?

Soluzione. Anche in questo caso usiamo il metodo grafico per ricavare l'intervallo in cui si trova la radice α, cioè [2, 3].



La derivata sarà $f'(x) = 3x^2 - 3$, strettamente positiva su tutto [2, 3] e quindi anche in α, che sarà perciò una radice singola. Calcoliamo ora le prime tre iterazioni del metodo di bisezione:

- $f(2) = -1$ e $f(3) = 15$, il punto medio dell'intervallo è $c_0 = \frac{5}{2}$, dove $f(\frac{5}{2}) = \frac{41}{8} > 0 \Rightarrow$ il nuovo intervallo è $[2, \frac{5}{2}]$;

- il punto medio dell'intervallo è $c_1 = \frac{2+\frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4}$, dove $f(\frac{9}{4}) = \frac{105}{64} > 0 \Rightarrow$ il nuovo intervallo è $[2, \frac{9}{4}]$;

- il punto medio dell'intervallo è $c_2 = \frac{2+\frac{9}{4}}{2} = \frac{17}{8}$, dove $f(\frac{17}{8}) = \frac{113}{512} > 0 \Rightarrow$ il nuovo intervallo è $[2, \frac{17}{8}]$;

- il punto medio dell'intervallo è $c_3 = \frac{2+\frac{17}{8}}{2} = \frac{33}{16}$, dove $f(\frac{33}{16}) = -\frac{1695}{4096} < 0 \Rightarrow$ il nuovo intervallo è $[\frac{33}{16}, \frac{17}{8}]$

quindi l'approssimazione migliore per α sarà $c_4 = \frac{67}{32}$.
Osserviamo infine che, poichè la radice è singola, la convergenza del metodo di Newton sarebbe del secondo ordine.