

## Prova scritta di Calcolo Numerico 1

26 marzo 2013

1. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

calcolarne, al variare del parametro reale positivo  $\alpha$ , il raggio spettrale e il numero di condizionamento rispetto alle norme con indice 1 e  $\infty$ .

2. Si determini la fattorizzazione  $PA = LU$  della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

e la si usi per calcolare il determinante e l'inversa di  $A$ .

3. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 1 \\ 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale  $\gamma$  essa risulta non singolare e per quali valori i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel, applicati al sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , risultano convergenti.

4. Si classifichi il seguente schema alle differenze finite e si dica se il suo ordine di convergenza e consistenza è almeno 2

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{4} \left[ f(x_k, \eta_k) + 3f \left( x_k + \frac{2}{3}h, \eta_k + \frac{2}{3}hf(x_k, \eta_k) \right) \right].$$

Considerato poi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x - y, & x \in [0, 3], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

si dica se ammette un'unica soluzione e si calcoli la soluzione approssimata nel punto  $x = 1$  mediante il metodo alle differenze introdotto in precedenza, nel caso in cui  $h = \frac{1}{2}$ .