Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

14 novembre 2013

Compito numero 1

1. Si ortonormalizzino i seguenti vettori mediante il procedimento di Gram-Schmidt

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Si consideri, inoltre, la matrice $A = [w_1, w_2, w_3, w_4]$ e si dica se è invertibile. Sfruttando poi i calcoli fatti, e motivando la risposta, si dica se la matrice $B = [w_2, w_1, w_3, w_4]$ è invertibile.

2. Si consideri il vettore $\mathbf{w} = (\alpha, 0, 1)^T$ dipendente dal parametro reale α. Costruita la matrice $A = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$, si dica per quali valori di α la matrice è singolare e per quali valori le sue tre colonne sono ortogonali. Fissato il valore $\alpha = 2$ si calcoli la norma con indice 1, 2 e ∞ delle tre colonne e si determini lo spettro della matrice.

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-4, 4]$

$$2y'' + \sqrt{5}y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -6, & -4 \leq x < -2, \\ 3x, & -2 \leq x < 2, \\ 6, & 2 \leq x < 4, \\ f(x+8), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   Stabilire, inoltre, motivando la risposta se la serie di Fourier di f è derivabile termine a termine in $[-4, 4]$.

4. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{\sqrt{2}(H(x+2) - H(x-2))\cos(3x)\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{4}{e^{2ik}(3 + i(k-4))}\right\}.$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\infty, \infty]$

$$3y'' - y = H(x + 2\pi) - H(x - \pi).$$

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

14 novembre 2013

Compito numero 2

1. Si ortonormalizzino i seguenti vettori mediante il procedimento di Gram-Schmidt

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Si consideri, inoltre, la matrice $B = [w_1, w_2, w_3, w_4]$ e si dica se è invertibile. Sfruttando poi i calcoli fatti, e motivando la risposta, si dica se la matrice $D = [w_4, w_2, w_3, w_1]$ è invertibile.

2. Si consideri il vettore $\mathbf{w} = (1, \beta, 0)^T$ dipendente dal parametro reale β. Costruita la matrice $A = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$, si dica per quali valori di β la matrice è singolare e per quali valori le sue tre colonne sono ortogonali. Fissato il valore $\beta = 2$ si calcoli la norma con indice 1, 2 e ∞ delle tre colonne e si determini lo spettro della matrice.

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-3, 3]$

$$\sqrt{2}y'' + 5y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 4, & -3 \leq x < -2, \\ -2x, & -2 \leq x < 0, \\ 2x, & 0 \leq x < 2, \\ 4, & 2 \leq x < 3, \\ f(x+6), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   Stabilire, inoltre, motivando la risposta se la serie di Fourier di f è derivabile termine a termine in $[-3, 3]$.

4. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{\sqrt{2}(H(x+\sqrt{2}) - H(x-\sqrt{2}))\sin(7x)\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{e^{\sqrt{3}ik}(3 + i(k+4))}\right\}.$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\infty, \infty]$

$$y'' - \pi y = H(x-3) - H(x-8).$$