Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero prima prova intermedia di Matematica Applicata

31 gennaio 2014

1. Si ortonormalizzino i seguenti vettori mediante il procedimento di Gram-Schmidt
$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Si consideri, inoltre, la matrice $A = [w_1, w_2, w_3, w_4]$ e si dica se è invertibile. Sfruttando poi i calcoli fatti, e motivando la risposta, si dica se la matrice BC con $B = [w_2, w_1, w_3, w_4]$ e $C = [w_2, w_1, w_4, w_3]$ è invertibile.

2. Assegnate le matrici
$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ -a & a & 0 & 0 \\ a & -1 & a & 0 \\ -a & b & -b & a \end{bmatrix},$$
si determinino i valori dei parametri a e b che rendono la matrice M l'inversa di L. Si consideri poi $A = LL^T$ e, sfruttando i calcoli fatti e motivando la risposta, si calcoli $\det(A)$, $\det(A^3)$ e A^{-1}. Infine, posto $\mathbf{u} = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4})^T$ e $\mathbf{v} = L\mathbf{u}$, si calcoli $\|\mathbf{v}\|_1$, $\|\mathbf{v}\|_2$ e $\|\mathbf{v}\|_\infty$.

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-5, 5]$
$$\frac{5}{\pi}y'' + y' - y = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} x - 1, & -5 \le x < 0, \\ x + 1, & 0 \le x < 5, \\ f(x + 10), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
Stabilire, inoltre, motivando la risposta se la serie di Fourier di f è integrabile termine a termine in $[-5, 5]$.

4. Eseguire i seguenti calcoli:
$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{3ik}}{1 + i(k - 2)}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{e^{-x}H(x - 3) * \frac{x}{2x^2 + 5}\right\}.$$

5. Risolvere mediante la trasformata di Fourier la seguente equazione differenziale
$$y'' - y' - 12y = \delta(x).$$