

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

31 gennaio 2014

1. Assegnate le matrici

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ -b & b & 0 & 0 \\ b & -1 & b & 0 \\ -b & -a & a & b \end{bmatrix},$$

determinare i valori dei parametri a e b che rendono la matrice M l'inversa di L . Dopo avere sostituito i valori di a e b trovati, calcolare il condizionamento rispetto alle norme con indice 1 e ∞ delle matrici L , M e $A = L^T L$. Dire infine quali sono gli autovalori di L e di L^3 e, posti $a = 1$ e $b = 0$, calcolare $\|M\|_2$.

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali è definita positiva. Si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto $\alpha = 1$, si calcolino infine le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 1 \ 0]^T$.

3. Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\alpha + 2} [f(x_k, \eta_k) + 2f(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k))].$$

Stabilire, inoltre, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$, se il seguente metodo multistep è stabile

$$\eta_{k+1} = -\gamma \eta_k + 2(2 + \gamma) \eta_{k-1} + h [f(x_k, \eta_k) - f(x_{k-1}, \eta_{k-1})].$$

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione in $[-5, 5]$

$$\frac{5}{\pi} y'' + y' - y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} x - 1, & -5 \leq x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x < 5, \\ f(x + 10), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Stabilire, inoltre, motivando la risposta se la serie di Fourier di f è integrabile termine a termine in $[-5, 5]$.

5. Calcolare $\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{3ik}}{1+i(k-2)} \right\}$ e $\mathcal{F} \left\{ e^{-x} H(x-3) * \frac{x}{2x^2+5} \right\}$.