Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

21 febbraio 2014

1. Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
e calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

2. Sia a un parametro reale e si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3a & a & 0 \\ a & a & 2a \\ 0 & a & 2a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Si dica per quali valori del parametro a il sistema ammette un'unica soluzione e per quali il metodo di Jacobi è convergente. Si calcolino, infine, le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel nell'ipotesi in cui $a = 1$ e il vettore iniziale è $x^{(0)} = [1,\ 0,\ 1]^T$.

3. Si studi la stabilità, la consistenza e l'ordine di convergenza del seguente metodo alle differenze finite
$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{5}\left[f(x_k, \eta_k) + 4f\left(x_k + \frac{5}{8}h, \eta_k + \frac{5}{8}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$
Dire se il seguente problema di Cauchy è ben posto
$$\begin{cases} y' = x + y, & x \in [1, \infty), \\ y(1) = 0, \end{cases}$$
e calcolarne la soluzione nel punto $x = 1$ utilizzando il metodo dato con passo $h = \frac{1}{2}$.

4. Eseguire i seguenti calcoli:
$$\mathcal{F}\left\{H(x-3)e^{-x} * \frac{1}{2}e^{-4x^2}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{(2x+3)H(x)e^{-x}\right\}.$$
dove $H(x)$ denota la funzione di Heaviside.

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, l'equazione differenziale
$$y'' - 5y = \mathrm{e}^{2x}H(-x),$$
dove $x \in \mathbb{R}$.