

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

6 giugno 2014

1. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 5 \\ -x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -10 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ 2x_2 + 4x_3 = -8 \end{cases}$$

calcolare il determinante della matrice dei coefficienti mediante la fattorizzazione $PA = LU$.

2. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \beta & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & \beta & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale β la matrice A è invertibile e per quali valori il metodo di Jacobi risulta convergente se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Posto $\beta = 1$, calcolare le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, utilizzando il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

3. Trasformare il seguente problema del second'ordine

$$\begin{cases} y''(x) = \cos(2\pi x) + y, & x \in [1, \infty) \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$$

in un sistema del prim'ordine e calcolare i primi tre passi $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ del metodo di Eulero utilizzando il passo $h = \frac{1}{2}$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}(4+x), & -4 \leq x < -1, \\ \sin(\frac{\pi}{2}x), & -1 \leq x < 1, \\ \frac{1}{3}(4-x), & 1 \leq x < 4. \end{cases}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, l'equazione differenziale

$$y'' - 5y' + 4y = \delta(x - 2),$$

dove $x \in \mathbb{R}$ e $\delta(x)$ denota la delta di Dirac.