Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

16 luglio 2014

1. Calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

e utilizzarla per calcolare il suo determinante e le prime due colonne della sua inversa.

2. Considerato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 - \sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_3 = 3 \\ -\sqrt{2}x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ \sqrt{2}x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

dire se il metodo di Jacobi risulta essere convergente e, fissato il vettore iniziale $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^T$, calcolare le iterazioni $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$.

3. Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{7}\left[\alpha f(x_i, \eta_i) + f(x_i + \alpha\beta h, \eta_i + \alpha\beta h f(x_i, \eta_i))\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

è convergente e per quale valori risulta del second'ordine. Sostituire quindi i valori $\alpha = 6$, $\beta = \frac{7}{12}$, $h = \frac{1}{2}$ e calcolare i valori di η_1 e η_2 per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy, \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x, & x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}], \\ 1, & x \in [-2, -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}, 2]. \end{cases}$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{x^2 + 8x + 20}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{7e^{-ik}\sin(5k)}{(1 + ik)k}\right\}.$$