

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

**Recupero prima prova intermedia di Matematica Applicata**

2 febbraio 2015

Compito numero 1

1. Si ortonormalizzino i seguenti vettori mediante il procedimento di Gram-Schmidt

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/8 & 1/4 \end{bmatrix}$$

dove  $\alpha$  è un parametro reale. Si dica per quali valori di  $\alpha$  la matrice  $A$  è invertibile e si calcoli al variare di  $\alpha$  la norma di  $A$  con indice 1 e  $\infty$ , lo spettro di  $A$  e il raggio spettrale di  $A$ . Infine, fissato il valore di  $\alpha$  che rende  $A$  l'inversa di  $B$ , si determini motivando la risposta il raggio spettrale di  $B$  e il determinante della matrice  $C = BA^2$ .

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo  $[-4, 4]$

$$-y'' + \sqrt{\pi}y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} x + 4, & -4 \leq x < -2, \\ 2, & -2 \leq x < 2, \\ 4 - x, & 2 \leq x < 4, \\ f(x + 8), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dire infine se  $f(x)$  è differenziabile termine a termine.

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{e^{-2ix}}{x^2 + 6x + 12} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{i(k-3)}{16 + (k-3)^2} \right\}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-y'' + \pi y = H(x-3) - H(x-4), \quad x \in \mathbb{R}.$$