Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
27 febbraio 2015

1. Si determini la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice $A = MM^T$, essendo
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
e la si utilizzi per calcolare la prima e la terza colonna dell'inversa di A e il suo determinante.

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 20 \end{bmatrix}.$$
Si stabilisca se A è invertibile e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel. Si calcolino infine le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 1]^T$.

3. Si consideri il seguente schema alle differenze finite
$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{1}{2}h\left[f(x_k, \eta_k) + f\left(x_k + h, \eta_k + hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$
Si dica, motivando la risposta, se è un metodo monostep o multistep, esplicito o implicito, si studi la stabilità, la consistenza e la convergenza. Infine, posto $h = 1/2$, si applichi tale metodo al seguente problema di Cauchy per approssimare la sua soluzione nel punto $x = 3$
$$\begin{cases} y' = x^2 y - x, & x \in [2, 3] \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

4. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione
$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & 0 \le x < 1. \end{cases}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale
$$-y'' + 2y' + 3y = \delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$