

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

30 aprile 2015

1. Eseguire la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

e calcolare, mediante la fattorizzazione trovata, il determinante, e la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 1, 1, 1]^T$.

2. Stabilire per quali valori del parametro reale β il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare

$$\begin{cases} 2\beta x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 2\beta x_2 + x_3 = 12 \\ x_2 + 2\beta x_3 = 20 \end{cases}$$

è convergente. Fissato $\beta = 1$ e il vettore iniziale $[1, 0, 1]^T$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo. Dire infine per quali valori di β la matrice è non singolare e per quali è definita positiva.

3. Trasformare il seguente problema del second'ordine

$$\begin{cases} y''(x) = -2y' + 3y, & x \in [1, 3] \\ y(1) = 1, & y'(1) = 0 \end{cases}$$

in un sistema del prim'ordine e calcolare i primi due passi $\{\eta_1, \eta_2\}$ del metodo di Eulero utilizzando il passo $h = \frac{1}{2}$.

4. Risolvere, ricorrendo alle serie di Fourier, l'equazione differenziale

$$y'' + 3y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} |x|, & -2 \leq x \leq 2, \\ f(x+4) = f(x). \end{cases}$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F} \left\{ \sin \left(\frac{x}{4} \right) e^{3x} H(-x) \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{2ik}}{\sqrt{2} - i(k-1)} \right\},$$

dove $H(x)$ denota la funzione di Heaviside