

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

25 giugno 2015

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 7 \\ 2 & 6 & 7 & 9 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare il determinante di A e la terza colonna della sua inversa.

2. Sia α un parametro reale e si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori di α la matrice è invertibile e per quali è definita positiva. Si stabilisca, inoltre, per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 0, 1]^T$ risulta essere convergente. Posto $\alpha = 2$, si calcolino infine le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel usando il vettore iniziale $[0, 1, 0]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = y' + y + x, & x \in [0, 2] \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione nel punto $x = \frac{3}{2}$.

4. Sviluppare in serie di Fourier, la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos \pi x, & -\frac{1}{2} \leq x < 0, \\ \cos \pi x - 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{4i}{x^2 + 10x + 30} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{2ik}}{(3 - ik)(8 + 2ik)} \right\}.$$