Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

19 novembre 2015

Compito numero 1

1. A partire dai seguenti vettori

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   si crei mediante il procedimento di Gram-Schmidt una base di vettori ortonormali $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Si consideri poi la matrice $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, si dica se questa è ortogonale e si indichi la sua inversa.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & a+3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix},$$

   Si stabilisca per quali valori del parametro reale a la matrice A è invertibile. Fissato $a = 1$, si calcoli lo spettro di A, il suo raggio spettrale e per quale valore di b la matrice $C = LU$ è l'inversa di A. Fissato tale valore di b, motivando la risposta, si dica qual'è lo spettro di C^2, il suo raggio spettrale e il determinante di AC^2.

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1, 1]$

$$2y'' + 3y' + y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -2-x, & -1 \le x < 0, \\ 2-x, & 0 \le x < 1, \\ f(x+2), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   Dire infine se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\cos 3x}{x^2+5}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{5ik}}{2+\mathrm{i}(6+3k)}\right\}.$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$2y' - \sqrt{3}y = \mathrm{e}^{-(x-3)} H(x-3), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prima prova intermedia di Matematica Applicata

19 novembre 2015

Compito numero 2

1. A partire dai seguenti vettori

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

si crei mediante il procedimento di Gram-Schmidt una base di vettori ortonormali $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Si consideri poi la matrice $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, si dica se questa è ortogonale e si indichi la sua inversa.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha-2 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & \alpha+3 \\ 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/8 \end{bmatrix},$$

Si stabilisca per quali valori del parametro reale α la matrice A è invertibile. Fissato $\alpha = 1$, si calcoli lo spettro di A, il suo raggio spettrale e per quale valore di β la matrice $C = LU$ è l'inversa di A. Fissato tale valore di β, motivando la risposta, si dica qual'è lo spettro di C^2, il suo raggio spettrale e il determinante di AC^2.

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-1, 1]$

$$y'' + 2y' + 3y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} -2 - x, & -1 \le x < 0, \\ -2 + x, & 0 \le x < 1, \\ f(x+2), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dire infine se $f(x)$ è differenziabile termine a termine.

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin 2x}{x^2+3}\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}k}}{5 + \mathrm{i}(6-2k)}\right\}.$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$3y' - \sqrt{2}y = \mathrm{e}^{-(x-2)} H(x-2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$