

Nome e matricola:

Corso di studi:

Prova scritta di Matematica Applicata

19 febbraio 2016

1. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 10 & 9 & 13 \\ 4 & 12 & 8 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

calcolare la fattorizzazione $PA = LU$ ed utilizzarla per calcolare la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, il determinante di A e la quarta colonna di A^{-1} .

2. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale α la matrice A risulta non singolare e per quali il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (3, 2, 4, 2)^T$, risulta convergente. Fissato, inoltre, $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ del metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0, 1)^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = 2xy - 1/y', & x \in [1, 5] \\ y(1) = 2, \quad y'(1) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

e approssimare la soluzione in $x = 2$ mediante il metodo di Eulero esplicito, utilizzando il passo $h = \frac{1}{2}$.

4. Classificare la seguente formula alle differenze finite per la risoluzione numerica di un problema di Cauchy

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{2\alpha} [3f(x_i, \eta_i) - f(x_i + \frac{\beta}{\alpha}h, \eta_i + \frac{\beta}{\alpha}hf(x_i, \eta_i))] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

e discuterne la convergenza al variare dei parametri reali α e β .

5. Con riferimento alla trasformata di Fourier, calcolare

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{e^{-2ix} \cos \pi x}{2 + ix} \right\}, \quad \mathcal{F} \{ 3xe^{-3|x|} \}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(3 + 2ik)(3 - 2ik)} \right\}.$$