Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

26 ottobre 2016

1. Ortonormalizzare i seguenti vettori mediante il procedimento di Gram-Schmidt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soluzione.

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_4 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Dopo aver calcolato la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

la si utilizzi per calcolare il determinante di A e la quarta colonna della sua inversa.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 256, \quad A^{-1}\mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}^T.$$

3. Utilizzando il metodo di Eulero-Cauchy esplicito, approssimare la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} y'' + (x-3)y = 2 - x \\ y(1) = 0, \ y'(1) = 1 \end{cases}$$

in $x = 2$, avendo posto il passo $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{5}{4}, \frac{17}{8})^T$

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' + 2y = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} -x-2, & x \in [-2,-1), \\ x, & x \in [-1,1), \\ 2-x, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

Soluzione.

$$y(x) = \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2(8-k^2\pi^2)} \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)$$

5. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-|x|}\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right\}, \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{3e^{-3ik}}{2+(k+\sqrt{\pi})^2}\right\}$$

Soluzione.

$$F_1(k) = \frac{1}{1+(k-\frac{3}{2})^2} + \frac{1}{1+(k+\frac{3}{2})^2}, \quad f_2(x) = \frac{3}{2\sqrt{2}} e^{\sqrt{\pi}i(3-x)} e^{-\sqrt{2}|x-3|}$$