

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

**Prima prova intermedia di Matematica Applicata**

15 novembre 2016

Compito numero 1

1. A partire dai seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

si costruisca, mediante il procedimento di Gram-Schmidt, l'insieme di vettori ortonormali  $\{q_1, q_2, q_3\}$ . Si consideri poi la matrice  $A = [q_1, q_2, q_3]$ . Dopo aver calcolato  $B = A^T A$ , si dica se la matrice  $A$  è invertibile e si indichi la sua inversa.

*Soluzione.*

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{110}}{11} \\ \frac{\sqrt{110}}{110} \\ \frac{3\sqrt{110}}{110} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{11}}{11} \\ \frac{\sqrt{11}}{11} \\ \frac{3\sqrt{11}}{11} \end{bmatrix}.$$

2. Si consideri il vettore  $\mathbf{v} = [0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}]^T$  e si calcoli la sua norma  $\infty$ , 1 e 2. Si considerino poi le matrici

$$A = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T, \quad B = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \beta \\ 0 & \beta & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Si determini il valore del parametro  $\beta$  che rende  $B$  l'inversa della matrice  $A$ , si dica se  $C$  è una matrice ortogonale e si indichi la sua inversa. Si calcoli lo spettro e il raggio spettrale della matrice  $A$  e si determini, nel modo più conveniente e motivando la risposta, quali sono gli autovalori di  $B$  e di  $B^2$  se a  $\beta$  si assegna il valore trovato.

*Soluzione.*

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \|\mathbf{v}\|_1 = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}, \quad \beta = -4$$

La matrice  $C$  è ortogonale e quindi  $C^{-1} = C^T$ .

$$\sigma(A) = \{1, 1, -7/3\}, \quad \rho(A) = 7/3, \quad \sigma(B) = \{1, 1, -3/7\}, \quad \sigma(B^2) = \{1, 1, 9/49\}$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo  $[-5, 5]$

$$y' + \sqrt{3}y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{5}x, & -5 \leq x < 0, \\ 2 - \frac{3}{5}x, & 0 \leq x < 5. \end{cases}$$

*Soluzione.*

$$S_y(x) = \frac{\sqrt{3}}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{150\sqrt{3}(1 + (-1)^{k+1})}{k^2\pi^2(75 + k^2\pi^2)} \right) \cos\left(\frac{k\pi}{5}x\right) + \left( \frac{30(1 + (-1)^{k+1})}{k\pi(75 + k^2\pi^2)} \right) \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right)$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\sin 7x}{2 + 3ix} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{-3ik}}{k^2 - 10k + 28} \right\}.$$

*Soluzione.*

$$F(k) = \frac{\pi}{3i} (e^{\frac{2}{3}(k-7)} H(7-k) - e^{\frac{2}{3}(k+7)} H(-k-7))$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{6} e^{5i(x-3)} e^{-\sqrt{3}|x-3|}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-7y' + y = H(x+5) - H(x+1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Soluzione.*

$$y(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{7}x}(e^{\frac{5}{7}} - e^{\frac{1}{7}}) & x < -5 \\ e^{\frac{1}{7}x}(e^{-\frac{1}{7}x} - e^{\frac{1}{7}}) & x \in [-5, -1] \\ 0 & x > -1 \end{cases}$$

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

**Prima prova intermedia di Matematica Applicata**

15 novembre 2016

Compito numero 2

1. A partire dai seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

si costruisca, mediante il procedimento di Gram-Schmidt, l'insieme di vettori ortonormali  $\{q_1, q_2, q_3\}$ . Si consideri poi la matrice  $A = [q_1, q_2, q_3]$ . Dopo aver calcolato  $B = A^T A$ , si dica se la matrice  $A$  è invertibile e si indichi la sua inversa.

*Soluzione.*

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{22}}{22} \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} \\ -\frac{\sqrt{22}}{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{11}}{11} \\ \frac{\sqrt{11}}{11} \\ \frac{3\sqrt{11}}{11} \end{bmatrix}.$$

2. Si consideri il vettore  $\mathbf{w} = [\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}]^T$  e si calcoli la sua norma  $\infty$ , 1 e 2. Si considerino poi le matrici

$$A = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Si determini il valore del parametro  $\alpha$  che rende  $B$  l'inversa della matrice  $A$ , si dica se  $C$  è una matrice ortogonale e si indichi la sua inversa. Si calcoli lo spettro e il raggio spettrale della matrice  $A$  e si determini, nel modo più conveniente e motivando la risposta, quali sono gli autovalori di  $B$  e di  $B^2$  se ad  $\alpha$  si assegna il valore trovato.

*Soluzione.*

$$\|\mathbf{w}\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \|\mathbf{w}\|_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \|\mathbf{w}\|_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \alpha = 2$$

La matrice  $C$  è ortogonale e quindi  $C^{-1} = C^T$ .

$$\sigma(A) = \{1, 1, -1/3\}, \quad \rho(A) = 1, \quad \sigma(B) = \{1, 1, -3\}, \quad \sigma(B^2) = \{1, 1, 9\}$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo  $[-3, 3]$

$$7y' - y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(3+x), & -3 \leq x < 0, \\ \frac{1}{3}(x-3), & 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

*Soluzione.*

$$S_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{14}{3(1 + \frac{49}{9}k^2\pi^2)} \right) \cos\left(\frac{k\pi}{3}x\right) + \left( \frac{2}{k\pi(1 + \frac{49}{9}k^2\pi^2)} \right) \sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right)$$

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\cos 2x}{5 - 4ix} \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{3ik}}{k^2 + 8k + 20} \right\}.$$

*Soluzione.*

$$F(k) = \frac{\pi}{4} (e^{-\frac{5}{4}(k-2)} H(k-2) + e^{-\frac{5}{4}(k+2)} H(k+2))$$

$$f(x) = \frac{1}{4} e^{-4i(x+3)} e^{-2|x+3|}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$\sqrt{3}y' - y = H(x+7) - H(x+3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Soluzione.*

$$y(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{\sqrt{3}}}(e^{\sqrt{3}} - e^{\frac{7}{\sqrt{3}}}) & x < -7 \\ e^{\frac{1}{\sqrt{3}}(x+3)} - 1 & x \in [-7, -3] \\ 0 & x > -3 \end{cases}$$