Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero prima prova intermedia di Matematica Applicata

31 gennaio 2017

1. Calcolare le norme $1, 2, \infty$ dei seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e ortonormalizzarli mediante il procedimento di Gram-Schmidt.

Soluzione. $\|v_1\|_\infty = \|v_2\|_\infty = \|v_3\|_\infty = 1$, $\|v_1\|_1 = \|v_2\|_1 = 2$, $\|v_3\|_1 = 3$ $\|v_1\|_2 = \|v_2\|_2 = \sqrt{2}$, $\quad \|v_3\|_2 = \sqrt{3}$. I vettori ortonormalizzati sono:

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

2. Assegnate le matrici

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix},$$

verificare che Q è ortogonale, calcolare le matrici $A = QL$, $B = LL^T$ e determinare i valori di α e β che rendono M l'inversa di L. Calcolare quindi, nel modo più efficiente, i determinanti e le inverse di A e di B.

Soluzione. $\alpha = 2$ e $\beta = 3$, $\det A = -1$, $\det B = 1$,

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{137}{25} & \frac{72}{25} & -\frac{24}{25} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{66}{25} & \frac{21}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 5 & -15 \\ 6 & -15 & 46 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = MQ^T = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ \frac{14}{25} & 1 & -\frac{48}{25} \\ -\frac{24}{25} & 3 & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = M^TM = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [-3, -2], \\ 0, & x \in [-2, 3] \end{cases}$$

Soluzione. La funzione non è né pari né dispari.

$$f(x) = -\frac{5}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\frac{\pi}{3}x\right) + b_k \sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right)$$

dove

$$a_k = \frac{4}{k\pi}\sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right) + \frac{6}{(k\pi)^2}\left((-1)^{k+1} + \cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right)\right)$$
$$b_k = \frac{4}{k\pi}\cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right) - \frac{6}{(k\pi)^2}\sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right) - \frac{6}{k\pi}(-1)^k$$

4. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}\left\{3(x-2)e^{-2|x-2|}\right\}, \qquad \mathcal{F}^{-1}\left\{9\,e^{\frac{-(k+4)^2}{4}}\right\}.$$

Soluzione.

$$F(k) = \frac{-24\mathrm{i}ke^{-2ik}}{(4+k^2)^2} \qquad f(x) = \frac{9\sqrt{\pi}}{\pi}e^{-x(x+4\mathrm{i})}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\infty, \infty]$

$$y'' + 6y' + 5y = \delta\,(x-3)\,.$$

Soluzione.

$$y(x) = \frac{1}{4}H(x-3)(e^{-(x-3)} - e^{-5(x-3)})$$