

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

## Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

13 gennaio 2017

### Compito numero 1

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = I - 4\mathbf{w}\mathbf{w}^T, \quad B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & \alpha & -2 \\ \alpha & 3 & \alpha \\ -2 & \alpha & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\beta}{2} \\ 0 & -\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove  $\mathbf{w} = [\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$ . Si determinino i valori del parametro  $\alpha$  che rendono  $B$  l'inversa di  $A$  e si calcoli l'indice di condizionamento della matrice  $A$  in norma  $\infty$ , 1 e 2. Si dica, inoltre, sulla base dei calcoli fatti e motivando la risposta se  $A$  è definita positiva. Si calcolino, infine, i valori di  $\beta$  che rendono  $C$  una matrice ortogonale e, fissato uno di questi, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare  $C\mathbf{x} = \mathbf{w}$ .

*Soluzione.*  $B$  è l'inversa di  $A$  se  $\alpha = 2$ ,  $\text{cond}_\infty(A) = \text{cond}_1(A) = 7$ ,  $\text{cond}_2(A) = 5$ .  $A$  non è definita positiva.  $C$  è ortogonale se  $\beta = \pm\sqrt{3}$ . Se  $\beta = \sqrt{3}$ ,  $\mathbf{x} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}]^T$  mentre se  $\beta = -\sqrt{3}$ ,  $\mathbf{x} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}]^T$ .

2. Si calcoli la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ -4x_1 = 4 \\ 8x_1 + 8x_2 - 8x_3 + 8x_4 = -8 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

*Soluzione.*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 8 & 8 & -8 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 64, \quad \mathbf{x} = [-1, 0, 1, 1]^T.$$

3. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \frac{\alpha}{3} x_3 = 4 \\ \alpha x_2 + \frac{1}{3} x_3 = 3 \\ \frac{\alpha}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \alpha x_3 = 1 \end{cases}$$

dove  $\alpha$  è un parametro reale. Si dica per quali valori di  $\alpha$  la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Posto  $\alpha = \frac{1}{5}$ , si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da  $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$ .

*Soluzione.*  $A$  è non singolare se  $\alpha \neq 0$  e  $\alpha \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$ . Il metodo di Gauss-Seidel converge se  $\alpha < -\frac{\sqrt{2}}{4}$  oppure  $\alpha > \frac{\sqrt{2}}{4}$ . Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono  $\mathbf{x}^{(1)} = [20, 15, 10/3]^T$ ,  $\mathbf{x}^{(2)} = [170/9, 85/9, -80/3]^T$ .

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = (y + 1)x - y', & x \in [\frac{1}{4}, 5] \\ y(\frac{1}{4}) = 0, y'(\frac{1}{4}) = 1 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo  $h = \frac{1}{4}$  per approssimare la sua soluzione in  $x = \frac{3}{4}$ .

*Soluzione.*  $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{4}, \frac{13}{16})^T$ ,  $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{29}{64}, \frac{49}{64})^T$ .

5. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

- (a)  $\eta_{k+1} = \eta_k + h \left[ \left( \frac{1}{2} - \delta^2 \right) f(x_k, \eta_k) + \frac{3\delta}{2} f(x_k + h, \eta_k + hf(x_k, \eta_k)) \right]$ ,  
 (b)  $\eta_{k+1} = (2\delta - \frac{5}{4})\eta_k - (\delta - 1)(\delta - \frac{1}{4})\eta_{k-1} + 2h(\delta + 1)f(x_k, \eta_k)$ .

Si determinino i valori di  $\delta \in \mathbb{R}$  che, oltre a rendere stabili entrambi i metodi, garantiscono un ordine di convergenza pari a 1 nel metodo monostep.

*Soluzione.* Lo schema (a) è monostep esplicito. È stabile per ogni  $\delta \in \mathbb{R}$  ed ha ordine di convergenza pari a 1 se  $\delta = 1$  oppure  $\delta = 1/2$ . Lo schema (b) è multistep esplicito ed è stabile se  $0 \leq \delta \leq 5/4$ . I valori cercati, pertanto, sono  $\delta = 1$  e  $\delta = 1/2$ .

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

## Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

13 gennaio 2017

### Compito numero 2

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = I - 6\mathbf{v}\mathbf{v}^T, \quad B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \beta & 2 & -2 \\ 2 & \beta & 2 \\ -2 & 2 & \beta \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

dove  $\mathbf{v} = [\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]^T$ . Si determinino i valori del parametro  $\beta$  che rendono  $B$  l'inversa di  $A$  e si calcoli l'indice di condizionamento della matrice  $A$  in norma  $\infty$ , 1 e 2. Si dica, inoltre, sulla base dei calcoli fatti e motivando la risposta se  $A$  è definita positiva. Si calcolino, infine, i valori di  $\alpha$  che rendono  $C$  una matrice ortogonale e, fissato uno di questi, si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare  $C\mathbf{x} = \mathbf{v}$ .

*Soluzione.*  $B$  è l'inversa di  $A$  se  $\beta = 3$ ,  $\text{cond}_\infty(A) = \text{cond}_1(A) = 7$ ,  $\text{cond}_2(A) = 5$ .  $A$  non è definita positiva.  $C$  è ortogonale se  $\alpha = \pm\sqrt{3}$ . Se  $\alpha = \sqrt{3}$ ,  $\mathbf{x} = [\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}]^T$  mentre se  $\alpha = -\sqrt{3}$ ,  $\mathbf{x} = [\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}]^T$ .

2. Si calcoli la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ -4x_1 = 4 \\ 8x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 16 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

e la si usi per risolvere il sistema e calcolare il determinante della matrice.

*Soluzione.*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 64, \quad \mathbf{x} = [-1, 0, 1, 2]^T.$$

3. Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \frac{\alpha}{3} x_3 = 4 \\ \alpha x_2 + \frac{1}{3} x_3 = 3 \\ \frac{\alpha}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \alpha x_3 = 1 \end{cases}$$

dove  $\alpha$  è un parametro reale. Si dica per quali valori di  $\alpha$  la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Posto  $\alpha = \frac{3}{2}$ , si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da  $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$ .

*Soluzione.*  $A$  è non singolare se  $\alpha \neq 0$  e  $\alpha \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$ . Il metodo di Jacobi converge se  $\alpha < -\frac{\sqrt{2}}{4}$  oppure  $\alpha > \frac{\sqrt{2}}{4}$ . Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono  $\mathbf{x}^{(1)} = [8/3, 2, -2/3]^T$ ,  $\mathbf{x}^{(2)} = [26/9, 58/27, -188/243]^T$ .

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = (x+1)y + y', & x \in [\frac{1}{4}, 5] \\ y(\frac{1}{4}) = 1, y'(\frac{1}{4}) = 0 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo  $h = \frac{1}{4}$  per approssimare la sua soluzione in  $x = \frac{3}{4}$ .

*Soluzione.*  $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, \frac{5}{16})^T$ ,  $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{69}{64}, \frac{49}{64})^T$ .

5. Si classifichino i seguenti metodi alle differenze finite:

(a)  $\eta_{k+1} = (2\gamma - \frac{9}{8})\eta_k - (\gamma - 1)(\gamma - \frac{1}{8})\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k)$

(b)  $\eta_{k+1} = \eta_k + h [(\frac{1}{4} - \gamma^2) f(x_k, \eta_k) + \frac{7\gamma}{4} f(x_k + h, \eta_k + hf(x_k, \eta_k))]$ .

Si determinino i valori di  $\gamma \in \mathbb{R}$  che, oltre a rendere stabili entrambi i metodi, garantiscono un ordine di convergenza pari a 1 nel metodo monostep.

*Soluzione.* Lo schema (a) è multistep esplicito ed è stabile se  $0 \leq \gamma \leq 9/8$ . Lo schema (b) è monostep esplicito. È stabile per ogni  $\gamma \in \mathbb{R}$  ed ha ordine di convergenza pari a 1 se  $\gamma = 1$  oppure  $\gamma = 3/4$ . I valori cercati, pertanto, sono  $\gamma = 1$  e  $\gamma = 3/4$ .