Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
31 gennaio 2017

1. Assegnate le matrici

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{24}{25} & 0 & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix},$$

verificare che Q è ortogonale, calcolare le matrici $A = QL$, $B = LL^T$ e determinare i valori di α e β che rendono M l'inversa di L. Calcolare quindi, nel modo più efficiente, i determinanti e le inverse di A e di B.

Soluzione. $\alpha = 2$ e $\beta = 3$, $\det(A) = -1$, $\det(B) = 1$,

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{137}{25} & \frac{72}{25} & -\frac{24}{25} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{66}{25} & \frac{21}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 5 & -15 \\ 6 & -15 & 46 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = MQ^T = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & 0 & -\frac{24}{25} \\ \frac{14}{25} & 1 & -\frac{48}{25} \\ -\frac{24}{25} & 3 & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = M^T M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

e utilizzarla per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti, e la terza colonna dell'inversa della matrice dei coefficienti.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 1, \quad \mathbf{x} = [-1, 2, -3, 4]^T, \quad \mathbf{x}^{(3)} = [0, 1, -2, 1]^T.$$

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = xy' - 3y \quad x \in [-5, 5] \\ y(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, y'(-\frac{1}{2}) = 1 \end{cases}$$

e approssimare la soluzione in $x = \frac{1}{2}$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 0)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (1, -3/2)^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [-3, -2], \\ 0, & x \in [-2, 3] \end{cases}$$

Soluzione. La funzione non è né pari né dispari.

$$f(x) = -\frac{5}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\frac{\pi}{3}x\right) + b_k \sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right)$$

dove

$$a_k = \frac{4}{k\pi} \sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right) + \frac{6}{(k\pi)^2}\left((-1)^{k+1} + \cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right)\right)$$
$$b_k = \frac{4}{k\pi} \cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right) - \frac{6}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right) - \frac{6}{k\pi}(-1)^k$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\infty, \infty]$

$$y'' + 6y' + 5y = \delta\left(x - 3\right).$$

Soluzione.

$$y(x) = \frac{1}{4} H(x-3)(e^{-(x-3)} - e^{-5(x-3)})$$