

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

**Prova scritta di Matematica Applicata**

21 febbraio 2017

1. Calcolare, mediante la fattorizzazione  $PA = LU$ , l'inversa della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e il condizionamento in norma 1 e in norma  $\infty$  di  $A$ .

*Soluzione.*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -2/5 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5/3 & 3 \\ 0 & 0 & 6/5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 1/3 & -2/3 & 5/6 \end{bmatrix}, \quad \text{cond}_{\infty}(A) = 15 \quad \text{cond}_1(A) = 17$$

2. Siano dati

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dire per quali valori del parametro  $\gamma$  la matrice  $A$  risulta non singolare, per quali è definita positiva e per quali il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  risulta convergente. Si calcolino infine le prime due iterazioni del metodo di Jacobi a partire dal vettore iniziale  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ .

*Soluzione.*  $A$  è non singolare per ogni  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$  ed è definita positiva se  $\gamma > 1$ . Il metodo di Jacobi è convergente se  $\gamma < -1$  oppure  $\gamma > 1$  e le iterate sono  $\mathbf{x}^{(1)} = [1/\gamma, 2/\gamma, 1/\gamma, 2/\gamma]^T$ ,  $\mathbf{x}^{(2)} = [1/\gamma, (2+\gamma)/\gamma^2, 1/\gamma, (2+\gamma)/\gamma^2]^T$ .

3. Stabilire, motivando opportunamente la risposta, se il seguente metodo alle differenze finite è monostep, convergente, del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h [6f(x_k, \eta_k) - 5f(x_k + 4h, \eta_k + 4hf(x_k, \eta_k))].$$

Calcolare inoltre, mediante il precedente metodo, la soluzione del seguente problema di Cauchy in  $x = 1/2$  con passo  $h = 1/2$

$$\begin{cases} y' = -3xy & x \in [-5, 5] \\ y(-\frac{1}{2}) = 1, \end{cases}$$

4. Calcolare la seguente antitrasformata di Fourier

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\sin 2k}{k(9+k^2)} \right\}$$

*Soluzione.* Il metodo alle differenze finite è monostep, convergente ma non è del secondo ordine. La soluzione del problema di Cauchy in  $x = 1/2$  è  $\eta_2 = 808$ .

5. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo  $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

$$y'' + 2y = -3x.$$

*Soluzione.*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16(-1)^k}{k\pi(8-9k^2\pi^2)} \sin\left(\frac{3}{2}k\pi x\right)$$

6. Eseguire i seguenti calcoli:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{-2ik}}{k^2 + 4k + 6} \right\}, \quad \mathcal{F} \left\{ \frac{\cos(x-4)}{(x-4)^2 + 1} \right\}.$$

*Soluzione.*

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-2i(x-2) - \sqrt{2}|x-2|} \quad F(k) = \frac{\pi}{2} e^{-4ik} (e^{-|k-1|} + e^{-|k+1|})$$