Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
30 marzo 2017

1. Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
ed utilizzarla per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (-1, 1, 0, 0)^T$, e per calcolare la terza colonna di A^{-1}.

   Soluzione.
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$\mathbf{x} = (-1, 0, 2, -2)^T$, $A^{-1}\mathbf{e}_3 = (-1, 1, 0, 0)^T$.

2. Siano dati
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Dire per quali valori del parametro β la matrice A risulta non singolare, per quali è definita positiva e per quali il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risulta convergente. Posto $\beta = 1/2$, si calcolino infine le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

   Soluzione. A è non singolare per $\beta \neq -1, 0, 1$ e non è definita positiva per nessun valore di β. Il metodo di Gauss-Seidel è convergente se $-1 < \beta < 1$ e le iterate sono $\mathbf{x}^{(1)} = (-1/2, 0, -5/4)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (-13/8, 0, -29/16)^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine
$$\begin{cases} y'' = xy + (x-1)y', & x \in [1, \infty) \\ y(1) = 1, \ y'(1) = -1, \end{cases}$$
e approssimare la soluzione in $x = 2$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$.

   Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1/2, -1/2)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (1/4, -1/4)^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \in [-2,0), \\ 2x-1, & x \in [0,2]. \end{cases}$$

Soluzione.

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{k\pi} \left(3(-1)^k + 1\right) \right) \sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right).$$

5. Calcolare la seguente antitrasformata di Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{\sin 2k}{k(9+k^2)} \right\}$$

Soluzione.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{36}\mathrm{e}^{3x}\left(\mathrm{e}^{6} - \mathrm{e}^{-6}\right), & x < -2, \\ \frac{1}{36}\left(2 - \mathrm{e}^{-3(x+2)} - \mathrm{e}^{3(x-2)}\right), & -2 \le x < 2, \\ \frac{1}{36}\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{6} - \mathrm{e}^{-6}\right), & x \ge 2. \end{cases}$$