Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

9 giugno 2017

1. Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

ed utilizzarla per calcolare il determinante di A, risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (4, 5, 5)^T$, e calcolare la terza colonna di A^{-1}.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/5 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 6/5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$det(A) = -6$, $\mathbf{x} = (5/3, 1/3, 4/3)^T$, $A^{-1}\mathbf{e}_3 = (-1/3, -1/6, 5/6)^T$.

2. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \beta & 0 \\ \beta & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale β A è invertibile, per quali risulta definita positiva e per quali valori il metodo di Jacobi risulta convergente se applicati al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Assegnato $\beta = 1/2$, calcolare le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0)^T$.

Soluzione. Invertibile $\forall \beta \neq \pm 1$, definita positiva per $-1 < \beta < 1$. Jacobi converge per $-1 < \beta < 1$. Iterazioni di Jacobi: $\mathbf{x}^{(1)} = (1/4, 1, 1/4)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (1/4, 3/4, 1/4)^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = (yx - 1)y', & x \in [1, \infty) \\ y(1) = 1, \ y'(1) = -1, \end{cases}$$

e approssimare la soluzione in $x = 2$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1/2, -1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (0, -7/8)^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = |x|$ con $x \in [-1/5, 1/5]$.

   Soluzione.
$$S_f(x) = \frac{1}{10} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^k - 1]}{5k^2\pi^2} \cos(5k\pi x).$$

5. Effettuare i seguenti calcoli
$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{k-2}{5+(k-2)^2}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{\left(\frac{1}{3x^2+3}\right) * (\mathrm{e}^{-2x} H(x-2))\right\},$$

   dove il simbolo $*$ indica la convoluzione.

   Soluzione.
$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{k-2}{5+(k-2)^2}\right\} = \begin{cases} \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-(\sqrt{5}-2\mathrm{i})x}, & x \geq 0, \\ -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{(\sqrt{5}+2\mathrm{i})x}, & x < 0, \end{cases}$$
$$\mathcal{F}\left\{\left(\frac{1}{3x^2+3}\right) * (\mathrm{e}^{-2x} H(x-2))\right\} = \frac{\pi}{3}\frac{\mathrm{e}^{-(2\mathrm{i}k+|k|)}}{2+\mathrm{i}k}.$$