Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
30 giugno 2017

1. Determinare la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

ed utilizzarla per calcolare il determinante di A e calcolare la seconda colonna di A^{-1}.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/5 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -12/5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$det(A) = 12$, $A^{-1}\mathbf{e}_2 = (-1/6, -5/6, 2/3, 1/2)^T$.

2. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale β A è invertibile, e per quali valori il metodo di Gauss Seidel risulta convergente se applicati al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Assegnato $\beta = -1$, calcolare le prime due iterate del metodo di Gauss Seidel, a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0)^T$.

Soluzione. Invertibile $\forall \beta \neq 0$. Gauss-Seidel converge per $-4 < \beta < 0$. Iterazioni di Gausse-Seidel: $\mathbf{x}^{(1)} = (2, -1/2, 1)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (3/2, -1/4, 1/2)^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = x(y-1)y', \quad x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \ y'\left(\frac{1}{2}\right) = -1, \end{cases}$$

e approssimare la soluzione in $x = \frac{3}{2}$ mediante il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1/2, -1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (0, -3/4)^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & -5 \leq x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Soluzione.

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{50(-1)^{k+1}}{k\pi} + \frac{100}{k^3\pi^3} \left((-1)^k - 1 \right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{5} x \right).$$

5. Effettuare i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(2+ik)(1+\frac{1}{5}ik)} \right\}, \qquad \mathcal{F} \left\{ \frac{\mathrm{e}^{-3ix}}{3+(x-2)^2} \right\}.$$

Soluzione.

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(2+ik)(1+\frac{1}{5}ik)} \right\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{5}{3}\mathrm{e}^{-2x}(1-\mathrm{e}^{-3x}), & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\mathrm{e}^{-3ix}}{3+(x-2)^2} \right\} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \mathrm{e}^{-\sqrt{3}|k+3|} \mathrm{e}^{-2i(k+3)}.$$